［コース ID：49］　基礎数学 AII

49.13　三角関数の加法定理

49.13.1　三角関数の加法定理

問題 001（バリエーション No.1）

α が第 1 象限の角, β が第 1 象限の角で $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\sin\beta = \dfrac{5}{13}$ のとき,

$\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ となる.

α が第 1 象限の角であることから

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{3}{5}$$

また, β が第 1 象限の角であることから

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{12}{13}$$

三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

より

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\\ &= \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} + \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}\\ &= \frac{36}{65} + \frac{20}{65} = \frac{56}{65}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{56}{65}}$

問題 001（バリエーション No.29）

α が第 1 象限の角, β が第 1 象限の角で $\cos\alpha = \dfrac{8}{17}$, $\sin\beta = \dfrac{4}{5}$ のとき,

$\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ となる.

α が第 1 象限の角であることから

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{15}{17}$$

また, β が第 1 象限の角であることから

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{3}{5}$$

三角関数の加法定理

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

より

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \\ &= \frac{8}{17}\cdot\frac{3}{5}-\frac{15}{17}\cdot\frac{4}{5} \\ &= \frac{24}{85}-\frac{60}{85}=\frac{-36}{85}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{-36}{85}}$

問題 001（バリエーション No.33）

α が第 1 象限の角, β が第 1 象限の角で $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\sin\beta=\dfrac{5}{13}$ のとき,

$\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ となる.

α が第 1 象限の角であることから

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5}$$

また, β が第 1 象限の角であることから

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{12}{13}$$

三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

より

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \\ &= \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} \\ &= \frac{36}{65}-\frac{20}{65}=\frac{16}{65}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{16}{65}}$

問題 001（バリエーション No.54）

α が第 1 象限の角, β が第 1 象限の角で $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\sin\beta=\dfrac{7}{25}$ のとき,

$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エオカ}}}$ となる.

α が第 1 象限の角であることから

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5}$$

また, β が第 1 象限の角であることから

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{24}{25}$$

三角関数の加法定理

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

より

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\&=\frac{4}{5}\cdot\frac{24}{25}+\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{25}\\&=\frac{96}{125}+\frac{21}{125}=\frac{117}{125}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{117}{125}}$

問題 001（バリエーション No.70）

α が第 1 象限の角, β が第 1 象限の角で $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\sin\beta=\dfrac{7}{25}$ のとき,

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ となる.

α が第 1 象限の角であることから

$$\tan\alpha=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}=\frac{3}{4}$$

また, β が第 1 象限の角であることから

$$\tan\beta=\sqrt{\frac{1}{1-\sin^2\beta}-1}=\frac{7}{24}$$

三角関数の加法定理

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

より

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{7}{24}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{24}}\\&=\frac{24\cdot3+7\cdot4}{4\cdot24-3\cdot7}\\&=\frac{100}{75}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$

問題 001（バリエーション No.79）

α が第 1 象限の角, β が第 1 象限の角で $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\sin\beta=\dfrac{12}{13}$ のとき,

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ となる.

α が第 1 象限の角であることから

$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \frac{3}{4}$$

また, β が第 1 象限の角であることから

$$\tan\beta = \sqrt{\frac{1}{1-\sin^2\beta} - 1} = \frac{12}{5}$$

三角関数の加法定理

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

より

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{12}{5}}{1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{12}{5}} \\
&= \frac{5\cdot 3 - 4\cdot 12}{4\cdot 5 + 3\cdot 12} \\
&= \frac{-33}{56}
\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{-33}{56}}$