［コース ID：49］　基礎数学 AII

49.14　加法定理の応用

49.14.1　加法定理の応用

問題 001（バリエーション No.1）

積の形の式 $\cos 4\alpha \cos 10\alpha$ を和・差の式に変形すると

$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\left\{\cos \boxed{\text{ウエ}}\, \alpha + \cos \boxed{\text{オ}}\, \alpha\right\}$ である.

三角関数の加法定理

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$
$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

を利用する．2 式を足すと

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B$$

となるので，$A = 4\alpha,\ B = 10\alpha$ とすると

$$\begin{aligned}\cos 4\alpha \cos 10\alpha &= \frac{1}{2}\left\{\cos 14\alpha + \cos(-6\alpha)\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\cos 14\alpha + \cos 6\alpha\right\}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\left\{\cos 14\alpha + \cos 6\alpha\right\}}$

問題 001（バリエーション No.6）

積の形の式 $\sin 4\alpha \sin 8\alpha$ を和・差の式に変形すると

$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\left\{\cos \boxed{\text{ウ}}\, \alpha - \cos \boxed{\text{エオ}}\, \alpha\right\}$ である.

三角関数の加法定理

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$
$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

を利用する．上式から下式を引くと

$$\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A \sin B$$

となるので，$A = 4\alpha,\ B = 8\alpha$ とすると

$$\begin{aligned}\sin 4\alpha \sin 8\alpha &= \frac{1}{2}\left\{\cos(-4\alpha) - \cos 12\alpha\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\cos 4\alpha - \cos 12\alpha\right\}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\left\{\cos 4\alpha - \cos 12\alpha\right\}}$

問題 002（バリエーション No.1）

$$\sin 5\theta + \sin 7\theta = a \sin b\theta \cos c\theta$$

が θ についての恒等式であるとき,

$$a = \boxed{\text{ア}}, \; b = \boxed{\text{イ}}, \; c = \boxed{\text{ウ}}$$

である.

三角関数の加法定理

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

を用いる．2 式を足すと,

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B$$

であるから,

$$\begin{cases} A+B = 5\theta \\ A-B = 7\theta \end{cases}$$

を解くと $A = 6\theta,\ B = -\theta$ を得る．よって

$$\sin 5\theta + \sin 7\theta = 2\sin 6\theta \cos(-\theta)$$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ より, $\sin 5\theta + \sin 7\theta = 2\sin 6\theta \cos\theta$ である.

【答】 $\boldsymbol{a = 2,\ b = 6,\ c = 1}$

問題 002（バリエーション No.6）

$$\cos 8\theta + \cos 4\theta = a \cos b\theta \cos c\theta$$

が θ についての恒等式であるとき,

$$a = \boxed{\text{ア}}, \; b = \boxed{\text{イ}}, \; c = \boxed{\text{ウ}}$$

である.

三角関数の加法定理

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$
$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

を用いる．2 式を足すと,

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B$$

であるから,

$$\begin{cases} A+B = 8\theta \\ A-B = 4\theta \end{cases}$$

を解くと $A = 6\theta,\ B = 2\theta$ を得る．よって

$$\cos 8\theta + \cos 4\theta = 2\cos 6\theta \cos 2\theta$$

【答】　$\boldsymbol{a = 2,\ b = 6,\ c = 2}$

問題 003（バリエーション No.1）

$\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ で θ が第 1 象限の角のとき, $\sin 2\theta = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ である.

θ は第 1 象限の角であるから $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ である．三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

において $\alpha = \beta$ とすると,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\alpha) &= \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha\\ \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

【答】　$\boldsymbol{\dfrac{24}{25}}$

問題 003（バリエーション No.21）

$\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ で θ が第 1 象限の角のとき, $\cos 2\theta = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である.

三角関数の加法定理

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

において $\alpha = \beta$ とすると,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\alpha) &= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha\\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cdot\frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

【答】　$\boldsymbol{\dfrac{7}{25}}$

問題 003（バリエーション No.31）

$\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ で θ が第 1 象限の角のとき, $\tan 2\theta = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である.

θ は第 1 象限の角であるから $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$ である．三角関数の加法定理

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

において $\alpha = \beta$ とすると，

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\alpha) &= \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}\\ \tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\cdot\dfrac{3}{4}}{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{24}{7}}$

問題 004（バリエーション No.1）

$3\sin x + 4\cos x = \boxed{\text{ア}}\sin(x+\alpha)$ と表すとき，

$\cos\alpha = \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$\sin\alpha = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である．

$3^2+4^2=25=5^2$ より

$$3\sin x + 4\cos x = 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right)$$

ここで

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{3^2+4^2}{25} = 1$$

であるから，点 $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ は単位円周上に存在する．よって

$$\cos\alpha = \frac{3}{5},\ \ \sin\alpha = \frac{4}{5}$$

を満たすような α が存在する．このとき加法定理を用いて

$$\begin{aligned}3\sin x + 4\cos x &= 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right)\\ &= 5\left(\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x\right)\\ &= 5\sin(x+\alpha)\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{3\sin x + 4\cos x = 5\sin(x+\alpha),\quad \cos\alpha = \dfrac{3}{5},\ \sin\alpha = \dfrac{4}{5}}$

問題 005（バリエーション No.1）

$2(\sin\theta\cos 3\theta + \sin\theta\cos 5\theta + \sin\theta\cos 7\theta) = \sin\boxed{\text{ア}}\theta - \sin\boxed{\text{イ}}\theta$ である．

三角関数の加法定理から

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$$

であるので $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ に注意すると

$$\begin{aligned} 2(\sin\theta\cos 3\theta + \sin\theta\cos 5\theta + \sin\theta\cos 7\theta) &= (\sin 4\theta + \sin(-2\theta)) + (\sin 6\theta + \sin(-4\theta)) \\ &\quad + (\sin 8\theta + \sin(-6\theta)) \\ &= \sin 8\theta - \sin 2\theta \end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\sin 8\theta - \sin 2\theta}$

問題 006（バリエーション No.1）

$2(\cos\theta\cos 3\theta - \cos\theta\cos 5\theta + \cos\theta\cos 7\theta) = \cos$ ア $\theta + \cos$ イ θ である.
ただし, ア と イ の回答の順序は問わない.

三角関数の加法定理から

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A\cos B$$

であるので $\cos(-\theta) = \cos\theta$ に注意すると

$$\begin{aligned} 2(\cos\theta\cos 3\theta - \cos\theta\cos 5\theta + \cos\theta\cos 7\theta) &= (\cos 4\theta + \cos(-2\theta)) - (\cos 6\theta + \cos(-4\theta)) \\ &\quad + (\cos 8\theta + \cos(-6\theta)) \\ &= \cos 8\theta + \cos 2\theta \end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\cos 8\theta + \cos 2\theta}$

問題 007（バリエーション No.1）

次の設問について ア に下の⓪〜⑨から最も適するものを選べ.
$\cos^4\theta - \sin^4\theta$ と恒等的に等しい式は ア である.

⓪	$\sin 2\theta$	⑤	$\sin^2\theta - \cos^2\theta$
①	$\cos 2\theta$	⑥	$\cos^2\theta + \sin^2\theta$
②	$\tan 2\theta$	⑦	$\dfrac{\cos^2\theta}{2\cos^2\theta - 1}$
③	$\sin^2\theta\tan^2\theta$	⑧	$\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$
④	$\cos^2\theta\tan^2\theta$	⑨	$\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ より

$$\begin{aligned} \cos^4\theta - \sin^4\theta &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= \cos 2\theta \end{aligned}$$

【答】　①

問題 008（バリエーション No.1）

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき, 関数
$$f(x) = \cos 2x - 4\cos x + 2$$
の最小値は $\boxed{\text{アイ}}$, 最大値は $\boxed{\text{ウ}}$ である.

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ より $y = \cos x$ とすると $0 \leqq x < 2\pi$ のとき, $-1 \leqq y \leqq 1$ である.

$$\begin{aligned}\cos 2x - 4\cos x + 2 &= (2\cos^2 x - 1) - 4\cos x + 2\\ &= 2\cos^2 x - 4\cos x + 1\\ &= 2y^2 - 4y + 1\\ &= 2(y-1)^2 - 1\end{aligned}$$

$2(y-1)^2 - 1$ は $-1 \leqq y \leqq 1$ において $y = 1$ で最小値 -1, $y = -1$ で最大値 7 をとる.

【答】　**最小値は -1, 最大値は 7.**