

【コース ID : 49】 基礎数学 AII

49.3 逆関数

49.3.1 逆関数

問題 001 (バリエーション No.1)

関数 $y = \frac{x}{2} + 2$ ($2 \leq x \leq 8$) の逆関数は $y = \boxed{\text{ア}}$ $x - \boxed{\text{イ}}$ であり, その定義域は $\boxed{\text{ウ}} \leq x \leq \boxed{\text{エ}}$, 値域は $\boxed{\text{オ}} \leq y \leq \boxed{\text{カ}}$ となる.

$y = \frac{x}{2} + 2$ は単調増加なので定義域内では, $x = 2$ で最小値 $y = 3$, $x = 8$ で最大値 $y = 6$ をとる.
すなわち y の値域は

$$3 \leq y \leq 6$$

である. $y = \frac{x}{2} + 2$ を x に関して解くと $x = 2y - 4$ なので, x と y を取り換えると求める逆関数は

$$y = 2x - 4$$

である. また, 上で述べたことから, その定義域は $3 \leq x \leq 6$ である.

$y = 2x - 4$ も単調増加なので, $x = 3$ のとき最小値 $y = 2$ をとり, $x = 6$ のとき最大値 $y = 8$ をとるから, その値域は $2 \leq y \leq 8$ である.

【答】 $y = 2x - 4$, 定義域は $3 \leq x \leq 6$, 値域は $2 \leq y \leq 8$

問題 002 (バリエーション No.1)

関数 $y = \frac{4}{x} + 5$ ($1 \leq x \leq 4$) の逆関数は $y = \frac{\boxed{\text{ア}}}{x - \boxed{\text{イ}}}$ であり,
その定義域は $\boxed{\text{ウ}} \leq x \leq \boxed{\text{エ}}$, 値域は $\boxed{\text{オ}} \leq y \leq \boxed{\text{カ}}$ となる.

$y = \frac{4}{x} + 5$ は単調減少であるから, $x = 1$ で最大値 $y = 9$, $x = 4$ で最小値 $y = 6$ をとる.
よって値域は

$$6 \leq y \leq 9$$

である. $y = \frac{4}{x} + 5$ を x に関して解くと, $x(y - 5) = 4$ より $x = \frac{4}{y - 5}$ となるので求める逆関数は

$$y = \frac{4}{x - 5}$$

であり, その定義域は $6 \leq x \leq 9$ である.

$y = \frac{4}{x - 5}$ も単調減少であり, $x = 6$ のとき最大値 $y = 4$, $x = 9$ のとき最小値 $y = 1$ をとるので, 値域は $1 \leq y \leq 4$ である.

【答】 $y = \frac{4}{x - 5}$, 定義域は $6 \leq x \leq 9$, 値域は $1 \leq y \leq 4$

問題 003 (バリエーション No.1)

関数 $y = (x - 4)^2 + 5$ ($5 < x < 6$) の逆関数は $y = \sqrt{x - \text{ア}} + \text{イ}$ であり, その定義域は $\text{ウ} < x < \text{エ}$, 値域は $\text{オ} < y < \text{カ}$ となる.

$y = (x - 4)^2 + 5$ は $5 < x < 6$ の範囲において単調増加であり, その値域は

$$6 < y < 9$$

である. $y = (x - 4)^2 + 5$ を x に関して解くと $y - 5 = (x - 4)^2$ より, 両辺の平方根をとると

$$x - 4 = \pm \sqrt{y - 5}$$

となるが, $5 < x < 6$ より

$$x = \sqrt{y - 5} + 4$$

である. よって逆関数は $y = \sqrt{x - 5} + 4$ となり, その定義域は $6 < x < 9$, 値域は $5 < y < 6$ である.

【答】 $y = \sqrt{x - 5} + 4$, 定義域は $6 < x < 9$, 値域は $5 < y < 6$