［コース ID：49］　基礎数学 AII

49.2　無理関数

49.2.1　無理関数

問題 001（バリエーション No.1）

次の設問を埋めよ. $\boxed{ア}$, $\boxed{ウ}$ については下の ⓪, ① から当てはまるものを選べ.
関数 $y = \sqrt{8x-16}+6$ の定義域は x $\boxed{ア}$ $\boxed{イ}$ であり, 値域は y $\boxed{ウ}$ $\boxed{エ}$ である.

⓪ $\geqq$
① $\leqq$

平方根の中の数は常に非負でなければならないので $8x-16 \geqq 0$, すなわち $x \geqq 2$ である.
また, $\sqrt{8x-16} \geqq 0$ より $y = \sqrt{8x-16}+6 \geqq 6$ である.

【答】　$\boldsymbol{x \geqq 2,\ \ y \geqq 6}$

問題 001（バリエーション No.49）

次の設問を埋めよ. $\boxed{ア}$, $\boxed{エ}$ については下の ⓪, ① から当てはまるものを選べ.
関数 $y = -\sqrt{-3x-3}-3$ の定義域は x $\boxed{ア}$ $\boxed{イウ}$ であり, 値域は y $\boxed{エ}$ $\boxed{オカ}$ である.

⓪ $\geqq$
① $\leqq$

$-3x-3 \geqq 0$ であるから $x \leqq -1$ である.
また, $-\sqrt{-3x-3} \leqq 0$ より, $y = -\sqrt{-3x-3}-3 \leqq -3$ である.

【答】　$\boldsymbol{x \leqq -1,\ \ y \leqq -3}$

問題 002（バリエーション No.1）

直線 $y = \dfrac{1}{2}x + c$ と無理関数 $y = \sqrt{x+9}$ が接するとき, c の値は $\boxed{ア}$ である.

交点を求めるため,

$$\frac{1}{2}x + c = \sqrt{x+9}$$

として, 両辺を 2 乗して整理すると

$$\frac{1}{4}x^2 + (c-1)x + (c^2-9) = 0$$

となる.
2 つのグラフが接するとき, 唯 1 つの交点を持つのでこの 2 次方程式は唯一つの解を持たなければな

らない．よって判別式を考えると

$$D = (c-1)^2 - (c^2-9) = -2c+10 = 0$$

これを解くと $c=5$ を得る．このとき

$$\frac{1}{4}x^2 + 4x + 16 = 0$$

となり，これを解くと $x=-8$ である．無理関数の定義域は $x \geqq -9$ なので $x=-8$ は定義域に含まれることが分かる．
よって $c=5$.

【答】　$c = 5$

問題 003（バリエーション No.1）

無理関数 $y=\sqrt{x+2}$ のグラフと直線 $y=x$ の交点の座標は ($\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$) である.

交点を求めるので

$$\sqrt{x+2} = x$$

として両辺を 2 乗すると

$$x+2 = x^2$$

すなわち

$$x^2 - x - 2 = 0$$

であり，これを解くと $x=-1, 2$ を得る．それぞれ $\sqrt{x+2}=x$ に代入してみると
$x=-1$ のとき，$\sqrt{-1+2} = 1 \neq -1$ より，二つのグラフは $x=-1$ で交わらない.
$x=2$ のとき，$\sqrt{2+2}=2$ であるから二つのグラフは $x=2$ で交わることが分かる.
よって交点は $(2,2)$ である.

(注意)
両辺を 2 乗することで符号の違い (値の正負) を無視してしまっているので，$x=-1$ という”偽”の解が出てきてしまっている．グラフを書いて $x=-1$ がどのような点に対応しているか確認してみよう．

【答】　$(2, 2)$

問題 004（バリエーション No.1）

不等式 $\sqrt{x+2} > x$ の解は $\boxed{\text{アイ}}$ $\leqq x <$ $\boxed{\text{ウ}}$ である.

まず x の定義域は $-2 \leqq x$ であることに注意する．$-2 \leqq x \leqq 0$ のとき，不等式は常に成り立つ.
$x>0$ として両辺を 2 乗すると

$$x+2 > x^2$$

すなわち

$$x^2 - x - 2 < 0$$

である．これを解くと $-1<x<2$ であるが，$x>0$ を仮定しているので $0<x<2$ である.
x が負の場合と合わせると解の範囲は $-2 \leqq x < 2$ となる.

【答】　$-2 \leqq x < 2$