［コース ID：49］　基礎数学 AII

49.4　累乗根, 指数の拡張

49.4.1　指数とは

49.4.2　累乗根

問題 001（バリエーション No.1）

$\sqrt[3]{8} = \boxed{\text{ア}}$ である.

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = (\sqrt[3]{2})^3 = 2$$

【答】　$\boldsymbol{\sqrt[3]{8} = 2}$

問題 002（バリエーション No.1）

8 の 3 乗根のうち実数であるものは $\boxed{\text{ア}}$ である.

$x^3 = 8$ を解くと,

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4) = 0$$

であるからその解は

$$x = 2, -1 \pm 3i$$

である. このうち実数であるものは $x = 2$ のみである.

【答】　$\boldsymbol{2}$

問題 003（バリエーション No.1）

16 の 4 乗根のうち実数であるものは $\boxed{\text{アイ}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$ である.

$x^4 = 16$ を解くと

$$x^4 - 16 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i) = 0$$

であるからその解は

$$x = \pm 2, \pm 2i$$

である. このなかで実数であるのは $x = \pm 2$ である.

【答】　$\boldsymbol{-2,\ 2}$

問題 004（バリエーション No.1）

$\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4} = \boxed{\text{ア}}$ である.

$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ であるから,

$$\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{2^3}=(\sqrt[3]{2})^3=2$$

【答】　**2**

問題 004（バリエーション No.233）

$(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16})^3=$ $\boxed{\text{アイ}}$ である.

$16=2^4$ に注意して展開すると

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16})^3&=(\sqrt[3]{2})^3-3(\sqrt[3]{2})^2(\sqrt[3]{16})+3(\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{16})^2-(\sqrt[3]{16})^3\\&=2-3\sqrt[3]{2^2\cdot 2^4}+3\sqrt[3]{2\cdot 2^8}-16\\&=-14-3\sqrt[3]{2^6}+3\sqrt[3]{2^9}\\&=-14-3(\sqrt[3]{2^3})^2+3(\sqrt[3]{2^3})^3\\&=-14-3\cdot 4+3\cdot 8\\&=-14-12+24=-2\end{aligned}$$

(別解)

$16=2^4$ より

$$\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=2\sqrt[3]{2}$$

よって

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16})^3&=(\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2})^3\\&=(\sqrt[3]{2})^3(1-2)^3\\&=2\cdot(-1)=-2\end{aligned}$$

【答】　$\mathbf{-2}$

問題 005（バリエーション No.1）

$\dfrac{\sqrt[3]{0.016}}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である.

$0.016=2^4\cdot(0.1)^3$ であるから

$$\frac{\sqrt[3]{0.016}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2^4}\,\sqrt[3]{(0.1)^3}}{\sqrt[3]{2}}=2\cdot(0.1)=0.2$$

【答】　$\mathbf{\dfrac{1}{5}}$

49.4.3　指数の拡張

問題 001（バリエーション No.1）

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-10}\times 4^{-5}=$ $\boxed{\text{ア}}$ である.

$$\frac{1}{2} = 2^{-1}, \quad 4 = 2^2$$

であるから

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^{-10} \times 4^{-5} &= (2^{-1})^{-10} \times (2^2)^{-5} \\ &= 2^{10} \times 2^{-10} \\ &= 1\end{aligned}$$

【答】　**1**

問題 002（バリエーション No.1）

等式

$$(a^{-2}b^{-1})^2 \times (a^{-2}b^4)^{-3} = a^x b^y$$

が成り立つならば,

$$x = \boxed{\text{ア}}\,,\ y = \boxed{\text{イウエ}}$$

である．ただし $a \neq 0,\ b \neq 0,\ a \neq b$ とする.

$a^m a^n = a^{m+n},\ (a^m)^n = a^{mn}$ であるから

$$\begin{aligned}(a^{-2}b^{-1})^2 \times (a^{-2}b^4)^{-3} &= (a^{-2})^2(b^{-1})^2 \times (a^{-2})^{-3}(b^4)^{-3} \\ &= a^{-4}b^{-2}a^6b^{-12} \\ &= a^2b^{-14}\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{x = 2,\ y = -14}$

問題 002（バリエーション No.21）

等式

$$\frac{(a^2b^2)^3}{(a^{-3}b^{-1})^{-3}} = a^x b^y$$

が成り立つならば,

$$x = \boxed{\text{アイ}}\,,\ y = \boxed{\text{ウ}}$$

である．ただし $a \neq 0,\ b \neq 0,\ a \neq b$ とする.

$a^m a^n = a^{m+n},\ (a^m)^n = a^{mn},\ a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{(a^2b^2)^3}{(a^{-3}b^{-1})^{-3}} &= (a^2)^3(b^2)^3 \times (a^{-3})^3(b^{-1})^3 \\ &= a^6b^6a^{-9}b^{-3} \\ &= a^{-3}b^3\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{x = -3,\ y = 3}$

問題 003（バリエーション No.1）

等式

$$\frac{\sqrt[9]{a^5}}{\sqrt[6]{a^{-2}}} = a^x$$

が成り立つならば,

$$x = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

である．ただし $a > 0$ とする．

$a^m a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$, $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[9]{a^5}}{\sqrt[6]{a^{-2}}} &= a^{\frac{5}{9}} a^{\frac{2}{6}} \\ &= a^{\frac{5}{9}+\frac{1}{3}} \\ &= a^{\frac{8}{9}}\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{x = \dfrac{8}{9}}$

問題 003（バリエーション No.31）

等式

$$\sqrt[9]{\sqrt[8]{a^4}} = a^x$$

が成り立つならば

$$x = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$$

である．ただし $a > 0$ とする．

$$\sqrt[9]{\sqrt[8]{a^4}} = ((a^4)^{\frac{1}{8}})^{\frac{1}{9}} = (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{9}} = a^{\frac{1}{18}}$$

【答】　$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{18}}$

問題 004（バリエーション No.1）

等式

$$\sqrt[x]{a^y} = a^{-0.2}$$

が成り立つならば,

$$x = \boxed{\text{ア}}\ ,\ y = \boxed{\text{イウ}}$$

である．ただし $a \neq 0$ とする．

$-0.2 = \dfrac{-1}{5}$ より,

$$\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}} = a^{\frac{-1}{5}}$$

よって $x=5,\ y=-1$.

【答】 $\boldsymbol{x=5,\ y=-1}$

問題 004（バリエーション No.21）

等式

$$\sqrt[x]{a^y}=a^{2.1}\times a^{4.1}$$

が成り立つならば,

$$x=\boxed{\text{ア}},\ y=\boxed{\text{イウ}}$$

である. ただし $a\neq 0$ とする.

$$\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}}=a^{2.1}\times a^{4.1}=a^{6.2}$$

$6.2=\dfrac{62}{10}=\dfrac{31}{5}$ より $x=5,\ y=31$.

【答】 $\boldsymbol{x=5,\ y=31}$

問題 005（バリエーション No.1）

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=2,\ x>0$ であるならば, $x+x^{-1}=\boxed{\text{ア}}$ である.

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=2$ の両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned}\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2&=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2+2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2\\&=x+2+x^{-1}\ =4\end{aligned}$$

よって $x+x^{-1}=4-2=2$ である.

【答】 $\mathbf{2}$

問題 005（バリエーション No.33）

$x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=2,\ x>0$ であるならば, $x^{\frac{3}{4}}+x^{-\frac{3}{4}}=\boxed{\text{ア}}$ である.

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3(a+b)ab$$

を用いて

$$\begin{aligned}x^{\frac{3}{4}}+x^{-\frac{3}{4}}&=\left(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^3-3\left(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)x^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{4}}\\&=2^3-3\times 2=2\end{aligned}$$

【答】 $\mathbf{2}$

問題 005（バリエーション No.68）

$x^2+x^{-2}=47,\ x>0$ であるならば, $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=$ $\boxed{\text{アイ}}$ である.

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

であるから,

$$x^2+x^{-2}=\left(x+x^{-1}\right)^2-2$$

$\left(x+x^{-1}\right)^2=47+2=49$ だが, $x>0$ より $x+x^{-1}=7$ である.

$$\begin{aligned}\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}\right)^2&=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2+2x^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}}+\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^2\\&=x^3+x^{-3}+2\\&=\left((x+x^{-1})^3-3(x+x^{-1})xx^{-1}\right)+2\\&=7^3-3\times7+2=324\end{aligned}$$

$324=18^2$ かつ $x>0$ より, $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=18$ となる.

【答】　18

問題 005（バリエーション No.76）

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=2,\ x>0$ であるならば, $x^{\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{6}}=$ $\boxed{\text{ア}}$ である.

$X=x^{\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{6}}$ とおくと,

$$\begin{aligned}x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}&=\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3+\left(x^{-\frac{1}{6}}\right)^3\\&=\left(x^{\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{6}}\right)^3-3\left(x^{\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{6}}\right)x^{\frac{1}{6}}x^{-\frac{1}{6}}\\&=X^3-3X\end{aligned}$$

$X^3-3X-2=(X+1)^2(X-2)=0$ より $X=-1,2$ であるが, $x>0$ より $X=2$ である.

【答】　2