［コースID：51］　微分積分I

51.11　極大・極小

51.11.1　極大・極小

問題 001（バリエーション No.1）

以下の設問において, 空欄 $\boxed{\text{イ}}$ は以下に示す選択肢から適切なものを選び, その番号をマークせよ.

0 極大
1 極小

関数 $f(x) = x^2 - 4x + 1$ は $x = \boxed{\text{ア}}$ で $\boxed{\text{イ}}$ となり, その値は $\boxed{\text{ウエ}}$ である.

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 2x - 4$$

よって $f'(x) = 0$ のとき, $x = 2$ である.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

$x < 2$ のとき $f'(x) < 0$ であり, $2 < x$ のとき $f'(x) > 0$ であるから $f(x)$ は $x = 2$ で極小となり, その値は $f(2) = -3$ である.

【答】　$\boldsymbol{x = 2}$ **で極小となり, その値は** $\boldsymbol{-3}$ **である.**

問題 002（バリエーション No.28）

関数 $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 45x + 2$ は $x = \boxed{\text{ア}}$ のとき極大値 $\boxed{\text{イウ}}$, $x = \boxed{\text{エオ}}$ のとき極小値 $\boxed{\text{カキクケ}}$ をとる.

関数 $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 45x + 2$ を微分すると

$$f'(x) = -3x^2 - 6x + 45$$

$f'(x) = -3(x^2 + 2x - 15) = -3(x + 5)(x - 3)$ より $f'(x) = 0$ のとき $x = -5, 3$ である.

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-173	$\nearrow$	83	$\searrow$

$$x < -5 \quad \text{または} \quad 3 < x \quad \text{のとき} \quad f'(x) < 0$$

$$-5 < x < 3 \quad \text{のとき} \quad f'(x) > 0$$

であるので, $f(x)$ は $x = -5$ のとき極小値 -173, $x = 3$ のとき極大値 83 をとる.

【答】　$\boldsymbol{x = 3}$ **のとき極大値 83,** $\boldsymbol{x = -5}$ **のとき極小値** $\boldsymbol{-173}$

問題 003（バリエーション No.1）

関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$ が, $x = 1$ で極小値 -1 をとるとき,

$$a = \boxed{\text{ア}}\ ,\ b = \boxed{\text{イウエ}}$$

であり, $f(x)$ は $x = \boxed{\text{オカ}}$ のとき極大値 $\boxed{\text{キクケ}}$ をとる.

関数 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$x = 1$ で極小値 -1 をとるので

$$f(1) = a + b + 8 = -1$$

$$f'(1) = 2a + b + 3 = 0$$

この連立一次方程式を解くと $a = 6,\ b = -15$ を得る. よって

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 7$$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$$

である. $f'(x) = 3(x+5)(x-1)$ より $f'(x) = 0$ のとき $x = -5, 1$ である. 増減表を調べると

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	107	$\searrow$	-1	$\nearrow$

よって $x = -5$ で極大値 107 をとる.

【答】　$\boldsymbol{a = 6,\ b = -15}$, $\boldsymbol{x = -5}$ **で極大値 107 をとる**.

問題 004（バリエーション No.1）

関数 $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 + 2}$ は $x = \boxed{\text{アイ}}$ のとき極大値 $\boxed{\text{ウ}}$, $x = \boxed{\text{エ}}$ のとき極小値 $\boxed{\text{オカ}}$ をとる.

関数 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x^2+2) - 2x(x^2-4x)}{(x^2+2)^2} = \frac{4x^2 + 4x - 8}{(x^2+2)^2}$$

$4x^2 + 4x - 8 = 4(x+2)(x-1)$ より, $f'(x) = 0$ のとき $x = -2, 1$ である.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$$x < -2 \quad \text{または} \quad 1 < x \quad \text{のとき} \quad f'(x) > 0$$

$$-2 < x < 1 \quad \text{のとき}\ f'(x) < 0$$

であるので $f(x)$ は $x = -2$ のとき極大値 2, $x = 1$ のとき極小値 -1 をとる.

【答】　$\boldsymbol{x = -2}$ **のとき極大値 2**, $\boldsymbol{x = 1}$ **のとき極小値** $\boldsymbol{-1}$ **をとる**.

問題 005（バリエーション No.7）

以下の設問において, 空欄 イ は以下に示す選択肢から適切なものを選び, その記号をマークせよ.

⓪ 極大
① 極小

関数 $f(x)=\sqrt{x^2-10x+29}$ は $x=$ ア で イ となり, その値は ウ である.

関数 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x)=\frac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+29}}=\frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+29}}$$

$f'(x)=0$ のとき $x=5$ であり, このとき $f(5)=2$ である.

x	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

$x<5$ のとき $f'(x)<0$, $5<x$ のとき $f'(x)>0$ であるから $f(x)$ は $x=5$ で極小値 2 をとる.

【答】　$\boldsymbol{x=5}$ **で極小となり, その値は 2 である.**

問題 005（バリエーション No.11）

以下の設問において, 空欄 イ は以下に示す選択肢から適切なものを選び, その記号をマークせよ.

⓪ 極大
① 極小

関数 $f(x)=x-2\sqrt{x}$ は $x=$ ア で イ となり, その値は ウエ である.

関数 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$f'(x)=0$ のとき, $\sqrt{x}=1$ より $x=1$ である. $x\geqq 0$ に注意して増減表を調べると

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$0<x<1$ のとき $f'(x)<0$, $1<x$ のとき $f'(x)>0$ であるから $f(x)$ は $x=1$ で極小値 -1 をとる.

【答】　$\boldsymbol{x=1}$ **で極小となり, その値は** $\boldsymbol{-1}$ **である.**

問題 005（バリエーション No.21）

以下の設問において, 空欄 イ は以下に示す選択肢から適切なものを選び, その記号をマークせよ.

0 極大
1 極小

関数 $f(x) = x\sqrt{3-x}$ は $x =$ ア で イ となり, その値は ウ である.

関数 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \sqrt{3-x} - \frac{x}{2\sqrt{3-x}} = \frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$$

$f'(x) = 0$ のとき $x = 2$ である. $x \leqq 3$ に注意して増減表を調べると

x	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$x < 2$ のとき $f'(x) > 0$, $2 < x < 3$ のとき $f'(x) < 0$ であるから $f(x)$ は $x = 2$ で極大値 2 をとる.

【答】　$\boldsymbol{x = 2}$ **で極大となり, その値は** $\boldsymbol{2}$ **である.**

問題 006（バリエーション No.1）

関数 $f(x) = x\sqrt{8-x^2}$ は $x =$ ア のとき極大値 イ , $x =$ ウエ のとき極小値 オカ をとる.

関数 $f(x)$ の定義域は $8 - x^2 \geqq 0$ より,

$$-2\sqrt{2} \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$$

である. $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{8-x^2}} = \frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$$

$f'(x) = 0$ のとき $8 - 2x^2 = 0$ より, $x = \pm 2$ である.

x	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

$$-2\sqrt{2} < x < -2 \quad \text{または} \quad 2 < x < 2\sqrt{2} \quad \text{のとき} \quad f'(x) < 0$$

$$-2 < x < 2 \quad \text{のとき}\ f'(x) > 0$$

であるから $f(x)$ は $x = -2$ で極小値 -4, $x = 2$ で極大値 4 をとる.

【答】　$\boldsymbol{x = 2}$ **のとき極大値** $\boldsymbol{4}$**,** $\boldsymbol{x = -2}$ **のとき極小値** $\boldsymbol{-4}$ **をとる.**

問題 007（バリエーション No.1）

関数 $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$ は $x =$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき極大値 $\boxed{\text{イウ}}$, $x =$ $\boxed{\text{エ}}$ のとき極小値 $\boxed{\text{オ}}$ をとる.

関数 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

$f'(x) = 0$ のとき $(x-1)^2 = 1$ より, $x = 0, 2$ である. $x = 1$ では定義されないことに注意して増減表を調べると

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$		$\searrow$	3	$\nearrow$

$$x < 0 \quad \text{または} \quad 2 < x \quad \text{のとき} \quad f'(x) > 0$$

$$0 < x < 1 \quad \text{または} \quad 1 < x < 2 \quad \text{のとき} \ f'(x) < 0$$

であるから $f(x)$ は $x = 0$ で極大値 -1, $x = 2$ で極小値 3 をとる.

【答】　$\boldsymbol{x = 0}$ **のとき極大値** $\boldsymbol{-1}$, $\boldsymbol{x = 2}$ **のとき極小値** $\boldsymbol{3}$ **をとる.**

問題 008（バリエーション No.1）

関数 $f(x) = x^2 e^{-x}$ は $x =$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき極大値 $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{e^2}$, $x =$ $\boxed{\text{ウ}}$ のとき極小値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる.

関数 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$$

$f'(x) = 0$ のとき $2x - x^2 = 0$ より, $x = 0, 2$ である.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{4}{e^2}$	$\searrow$

$$x < 0 \quad \text{または} \quad 2 < x \quad \text{のとき} \quad f'(x) < 0$$

$$0 < x < 2 \quad \text{のとき} \quad f'(x) > 0$$

であるから $f(x)$ は $x = 0$ で極小値 0, $x = 2$ で極大値 $\dfrac{4}{e^2}$ をとる.

【答】　$\boldsymbol{x = 2}$ **のとき極大値** $\boldsymbol{\dfrac{4}{e^2}}$, $\boldsymbol{x = 0}$ **のとき極小値** $\boldsymbol{0}$ **をとる.**

問題 009（バリエーション No.5）

関数 $f(x) = x + \sqrt{2}\cos x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ は

$x = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$ のとき極大値 $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi + \boxed{\text{オ}}$,

$x = \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$ のとき極小値 $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi - \boxed{\text{コ}}$ をとる.

関数 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 1 - \sqrt{2}\sin x$$

$f'(x) = 0$ のとき $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから, $0 \leqq x \leqq 2\pi$ より $x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}$ である.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	0	$+$	1
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}+1$	$\searrow$	$\frac{3\pi}{4}-1$	$\nearrow$	$2\pi+\sqrt{2}$

増減表から $f(x)$ は $x = \dfrac{\pi}{4}$ のとき極大値 $\dfrac{\pi}{4}+1$, $x = \dfrac{3\pi}{4}$ のとき極小値 $\dfrac{3\pi}{4}-1$ をとる.

【答】　$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{4}\pi}$ **のとき極大値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\pi + 1}$, $\boldsymbol{x = \dfrac{3}{4}\pi}$ **のとき極小値** $\boldsymbol{\dfrac{3}{4}\pi - 1}$ をとる.

問題 010（バリエーション No.1）

x についての方程式

$$x^3 + 6x^2 + 9x + 7 + a = 0$$

が, 相異なる 3 つの実数解をもつとき, 定数 a の満たすべき条件を求めよう.

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 7$ とおくと, 関数 $f(x)$ は

$x =$ $\boxed{\text{アイ}}$ のとき極大値 $\boxed{\text{ウ}}$,

$x =$ $\boxed{\text{エオ}}$ のとき極小値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる.

ところで, 与えられた方程式の実数解の個数は, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = -a$ との共有点の個数と考えることができる. よって共有点が 3 つになる場合について直線 $y = -a$ の y 切片 $-a$ がどのような範囲の値をとりうるかを調べればよい.

以上のことから, a のとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{キク}} < a < \boxed{\text{ケコ}}$$

であることがわかる.

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x+3)(x+1)$$

よって $f'(x) = 0$ のとき $x = -3, -1$ である.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$

増減表より関数 $f(x)$ は $\boldsymbol{x = -3}$ **のとき極大値 7**, $\boldsymbol{x = -1}$ **のとき極小値 3** をとる.

関数 $f(x)$ は $x = -3, -1$ でそれぞれ極大値 7, 極小値 3 をとるので, 直線 $y = -a$ は $-a = 3$ または $-a = 7$ のとき関数 $f(x)$ に接することが分かる.

よって $3 < -a < 7$ のとき直線 $y = -a$ と $f(x)$ は共有点を 3 つ持ち,

$-a < 3$ または $7 < -a$ のとき直線 $y = -a$ は $f(x)$ とただ一つの共有点を持つ.

3 つの共有点を持つための a のとりうる値の範囲は $\boldsymbol{-7 < a < -3}$ である.