［コース ID：51］　微分積分 I

51.13　不定形の極限

51.13.1　不定形の極限

問題 001（バリエーション No.10）

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \boxed{\text{ア}}$ である.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x} &= \lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\\ &= 2\cdot 1\cdot 1 = 2\end{aligned}$$

(別解)
ロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin 4x)'}{(\sin 2x)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4\cos 4x}{2\cos 2x}\\ &= \frac{4}{2} = 2\end{aligned}$$

【答】　2

問題 001（バリエーション No.39）

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{12(x-\tan x)}{x^3} = \boxed{\text{アイ}}$ である.

$x\to 0$ のとき, 分子, 分母 $\to 0$ であるからロピタルの定理より

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{12(x-\tan x)}{x^3} &= 12\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(x-\tan x)'}{(x^3)'}\\ &= 12\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{3x^2}\\ &= -12\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2\cos^2 x}\\ &= -4\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = -4\end{aligned}$$

【答】　-4

問題 002（バリエーション No.1）

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x} = \boxed{\text{ア}}$ である.

$x \to 0$ のとき分子, 分母 $\to 0$ であるのでロピタルの定理を使うと

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \cos x}{x} = \lim_{x\to 0}(e^x + \sin x) = 1 + 0 = 1$$

【答】　1

問題 002（バリエーション No.18）

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \boxed{\text{ア}}$ である.

ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

【答】　2

問題 003（バリエーション No.1）

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x}{x^2 + 2x} = \boxed{\text{ア}}$ である.

ロピタルの定理を使うと

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x}{x^2 + 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{\cos^2 x}}{2x + 2} = \frac{2}{2} = 1$$

【答】　1

問題 003（バリエーション No.2）

$\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x - \pi} = \boxed{\text{アイ}}$ である.

$x \to \pi$ のとき分子, 分母 $\to 0$ であるので, ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{x\to \pi}\frac{\cos x}{1} = \cos\pi = -1$$

【答】　-1

問題 004（バリエーション No.1）

$\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{x}{e^x} = \boxed{\text{ア}}$ である.

$x \to \infty$ のとき分子, 分母 $\to \infty$ であるので, ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to \infty}\frac{1}{e^x} = 0$$

【答】　**0**

問題 004（バリエーション No.3）

$\lim_{x\to\infty} x(\tan^{-1}x - \frac{\pi}{2}) =$ $\boxed{\text{アイ}}$ である．

$\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ であるから $\lim_{x\to\infty}(\tan^{-1}x - \frac{\pi}{2}) = 0$ である．また $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ であるので

$$x(\tan^{-1}x - \frac{\pi}{2}) = \frac{\tan^{-1}x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$$

にロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x(\tan^{-1}x - \frac{\pi}{2}) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\tan^{-1}x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\tan^{-1}x - \frac{\pi}{2}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\\ &= -\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = -\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = -\frac{1}{0+1} = -1\end{aligned}$$

【答】　**−1**

問題 004（バリエーション No.11）

$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^4} =$ $\boxed{\text{ア}}$ である．

$x\to\infty$ のとき分子, 分母 $\to\infty$ であるので, ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{4x^3} = 0$$

【答】　**0**