［コース ID：51］　微分積分 I

51.4　導関数の性質

51.4.1　導関数の性質

問題 001（バリエーション No.1）

関数 $f(x) = 2x^2 - 7x + 8$ の導関数を

$$f'(x) = ax^2 + bx + c$$

$(a, b, c$ は定数で, 0 の場合もありうる$)$
とするとき, $a =$ ア , $b =$ イ , $c =$ ウエ である.

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で定義される. $f(x) = 2x^2 - 7x + 8$ とすると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\big(2(x+h)^2 - 7(x+h) + 8\big) - (2x^2 - 7x + 8)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4hx + 2h^2 - 7h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (4x - 7 + 2h) = 4x - 7 \end{aligned}$$

よって $f'(x) = 4x - 7$ である.

(別解)
定数 C に対し $f(x) = C$ のとき $f'(x) = 0$ かつ

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

であり, 関数 $f(x), g(x)$ と定数 a, b に対し

$$\big(af(x) \pm bg(x)\big)' = af'(x) \pm bg'(x)$$

であるから

$$\begin{aligned} (2x^2 - 7x + 8)' &= (2x^2)' - (7x)' + 8' \\ &= 4x - 7 \end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{a = 0,\ b = 4,\ c = -7}$

問題 002（バリエーション No.1）

関数 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$ の導関数を

$$f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$(a, b, c, d$ は定数で, 0 の場合もありうる$)$
とするとき, $a =$ ア , $b =$ イ , $c =$ ウエ , $d =$ オカ である.

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で定義される．よって

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\big(2(x+h)^3 + 5(x+h)^2 - 8(x+h) - 7\big) - (2x^3 + 5x^2 - 8x - 7)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(6hx^2 + 6h^2x + 2h^3) + (10hx + 5h^2) - 8h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(6x^2 + 6hx + 2h^2 + 10x + 5h - 8) = 6x^2 + 10x - 8 \end{aligned}$$

よって $f'(x) = 6x^2 + 10x - 8$ である．

(別解)
定数 C に対し $f(x) = C$ のとき $f'(x) = 0$ かつ

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

であり, 関数 $f(x), g(x)$ と定数 a, b に対し

$$(af(x) \pm bg(x))' = af'(x) \pm bg'(x)$$

であるから

$$\begin{aligned} (2x^3 + 5x^2 - 8x - 7)' &= (2x^3)' + (5x^2)' - (8x)' - 7' \\ &= 6x^2 + 10x - 8 \end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{a = 0,\ b = 6,\ c = 10,\ d = -8}$

問題 003（バリエーション No.1）

関数 $f(x) = (2x+5)(3x^2+2x-5)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \boxed{\text{アイ}}\ x^2 + \boxed{\text{ウエ}}\ x$$

である.t

2 つの微分可能な関数 $f(x),\ g(x)$ に対し

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

が成り立つ.

$$g(x) = (2x+5), \quad h(x) = (3x^2+2x-5)$$

とすると $f(x) = g(x)h(x)$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+5)'(3x^2+2x-5) + (2x+5)(3x^2+2x-5)' \\ &= 2(3x^2+2x-5) + (2x+5)(6x+2) \\ &= (6x^2+4x-10) + (12x^2+34x+10) \\ &= 18x^2 + 38x \end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{18x^2 + 38x}$

問題 004（バリエーション No.1）

関数 $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{(x-1)^{\boxed{\text{ウ}}}}$$

である.

2 つの微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ に対し

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

が成り立つ.

$$g(x) = 3x+1, \quad h(x) = x-1$$

とすると $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x+1)'(x-1) - (3x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3(x-1) - (3x+1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-4}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{-4}{(x-1)^2}}$

問題 005（バリエーション No.1）

関数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \frac{\boxed{\text{アイ}}\,x}{(x^2+1)^{\boxed{\text{ウ}}}}$$

である.

微分可能な関数 $f(x)$ に対し

$$\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}' = -\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

が成り立つ.

$$g(x) = x^2+1$$

とすると $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}}$

問題 006（バリエーション No.1）

関数 $f(x) = (x^2 - 12x + 10)(x^2 + 4x + 2)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \boxed{\text{ア}}\, x^3 - \boxed{\text{イウ}}\, x^2 - \boxed{\text{エオ}}\, x + \boxed{\text{カキ}}$$

である．

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x^2 - 12x + 10)'(x^2 + 4x + 2) + (x^2 - 12x + 10)(x^2 + 4x + 2)' \\
&= (2x - 12)(x^2 + 4x + 2) + (x^2 - 12x + 10)(2x + 4) \\
&= (2x^3 - 4x^2 - 44x - 24) + (2x^3 - 20x^2 - 28x + 40) \\
&= 4x^3 - 24x^2 - 72x + 16
\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{4x^3 - 24x^2 - 72x + 16}$

問題 007（バリエーション No.1）

関数 $f(x) = -7x^{-9}$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \boxed{\text{アイ}}\, x^{\boxed{\text{ウエオ}}}$$

である．

任意の n に対し $(x^n)' = nx^{n-1}$ であるから

$$f'(x) = (-7) \times (-9)x^{-9-1} = 63x^{-10}$$

【答】　$\boldsymbol{63x^{-10}}$

問題 008（バリエーション No.1）

関数 $f(x) = \sqrt{2x+1}$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\sqrt{\boxed{\text{イ}}\, x + \boxed{\text{ウ}}}}$$

である．

任意の数 n と微分可能な関数 $f(x)$ に対し

$$(\{f(x)\}^n)' = n\{f(x)\}^{n-1} f'(x)$$

が成り立つ．

$$g(x) = 2x + 1$$

とすると

$$f(x) = \{g(x)\}^{\frac{1}{2}}$$

であるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\cdot(2x+1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(2x+1)' \\ &= \frac{1}{2}\cdot(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}}$

問題 009（バリエーション No.1）

関数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+5}}{3x+4}$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\frac{\boxed{\text{アイ}}\,x-\boxed{\text{ウエ}}}{\sqrt{\boxed{\text{オ}}\,x+\boxed{\text{カ}}}\,(3x+4)^{\boxed{\text{キ}}}}$$

である.

$$g(x)=\sqrt{2x+5},\quad h(x)=3x+4$$

とすると

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+5}},\quad h'(x)=3$$

であるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{\{h(x)\}^2} \\ &= \frac{\dfrac{3x+4}{\sqrt{2x+5}}-3\sqrt{2x+5}}{(3x+4)^2} \\ &= \frac{(3x+4)-3(2x+5)}{\sqrt{2x+5}(3x+4)^2} \\ &= \frac{-3x-11}{\sqrt{2x+5}(3x+4)^2} \end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{-3x-11}{\sqrt{2x+5}(3x+4)^2}}$

問題 010（バリエーション No.1）

関数 $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\frac{x+\boxed{\text{ア}}}{\sqrt{x^2+\boxed{\text{イ}}\,x-\boxed{\text{ウ}}}}$$

である

$$g(x) = x^2 + 2x - 3$$

とおくと

$$f(x) = \{g(x)\}^{\frac{1}{2}}$$

であるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2x - 3)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2 + 2x - 3)' \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} \end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}}$

問題 011（バリエーション No.1）

関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \frac{\boxed{\text{ア}}\,x - \boxed{\text{イ}}}{\sqrt{(x^2 + 2x - 3)^{\boxed{\text{ウ}}}}}$$

である.

$$g(x) = x^2 + 2x - 3$$

とおくと

$$f(x) = \{g(x)\}^{-\frac{1}{2}}$$

であるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2x - 3)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2 + 2x - 3)' \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2x - 3)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x + 2) \\ &= -\frac{x+1}{\sqrt{(x^2 + 2x - 3)^3}} \end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{-x-1}{\sqrt{(x^2+2x-3)^3}}}$

問題 012（バリエーション No.1）

関数 $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-4}$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{(x-4)^{\boxed{\text{ウ}}}}$$

である.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x+1)'(x-4)-(2x+1)(x-4)'}{(x-4)^2} \\
&= \frac{2(x-4)-(2x+1)}{(x-4)^2} \\
&= \frac{-9}{(x-4)^2}
\end{aligned}$$

(別解)

$$\frac{2x+1}{x-4} = \frac{2(x-4)+9}{x-4} = 2+\frac{9}{x-4}$$

であるから

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(2+\frac{9}{x-4}\right)' \\
&= -\frac{9}{(x-4)^2}
\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{-9}{(x-4)^2}}$