

【コース ID : 51】 微分積分 I

51.7 合成関数の導関数

51.7.1 合成関数の導関数

問題 001 (バリエーション No.1)

関数 $f(x) = \sin^2 2x$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \boxed{\text{ア}} \sin(\boxed{\text{イ}} x)$$

である.

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ に注意して

$$\begin{aligned} (\sin^2 2x)' &= 2 \cdot (\sin 2x) \cdot (\sin 2x)' \\ &= 2 \sin 2x \cdot (2 \cos 2x) \\ &= 2 \sin 4x \end{aligned}$$

【答】 $2 \sin 4x$

問題 002 (バリエーション No.1)

関数 $f(x) = \frac{1}{\sin 2x}$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\sin(\boxed{\text{ウ}} x) \tan(\boxed{\text{エ}} x)}$$

である.

$$f'(x) = -\frac{(\sin 2x)'}{\sin^2 2x} = -\frac{2 \cos 2x}{\sin^2 2x} = -\frac{2}{\sin 2x \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x}} = -\frac{2}{\sin 2x \tan 2x}$$

【答】 $\frac{-2}{\sin 2x \tan 2x}$

問題 003 (バリエーション No.1)

以下の設問では、空欄に入る式を後の選択肢から選び、その番号をマークせよ。

関数 $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}$$

である。

選択肢:

- ① $\sin 2x$
- ① $\cos 2x$
- ② $\tan 2x$

$$(\sqrt{\sin 2x})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sin 2x)'}{\sqrt{\sin 2x}} = \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$$

【答】 $\frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$

問題 004 (バリエーション No.1)

関数 $f(x) = e^{\sin x}$ の導関数 $f'(x)$ を表す式として正しいものを、以下から選び、その番号を へマークせよ。

- ① $e^{\sin x} \cos x$
- ① $e^{\sin x} \sin x$
- ② $-e^{\sin x} \cos x$
- ③ $-e^{\sin x} \sin x$
- ④ $e^{\cos x} \cos x$
- ⑤ $e^{\cos x} \sin x$
- ⑥ $-e^{\sin x} \tan x$
- ⑦ $-e^{\cos x} \tan x$

$$(e^{\sin x})' = e^{\sin x} (\sin x)' = e^{\sin x} \cos x$$

【答】 ①

問題 005 (バリエーション No.31)

関数 $f(x) = \cos(2x^3 - 5x + 3)$ の導関数 $f'(x)$ を表す式として正しいものを、以下から選び、その番号を へマークせよ。

- ① $-(6x^2 - 5) \sin(2x^3 - 5x + 3)$
- ② $-2(3x^2 - 2) \sin(2x^3 - 5x + 3)$
- ③ $-3(2x^2 - 1) \sin(2x^3 - 5x + 3)$
- ④ $-(6x^2 - 1) \sin(2x^3 - 5x + 3)$
- ⑤ $-(6x^2 + 1) \sin(2x^3 - 5x + 3)$
- ⑥ $-2(3x^2 + 1) \sin(2x^3 - 5x + 3)$
- ⑦ $-3(2x^2 + 1) \sin(2x^3 - 5x + 3)$
- ⑧ $-(6x^2 + 5) \sin(2x^3 - 5x + 3)$

$$\begin{aligned} (\cos(2x^3 - 5x + 3))' &= -\sin(2x^3 - 5x + 3) \cdot (2x^3 - 5x + 3)' \\ &= -(6x^2 - 5) \sin(2x^3 - 5x + 3) \end{aligned}$$

【答】 ①

問題 006 (バリエーション No.1)

関数 $f(x) = (x^2 - 5x + 5)^3$ の導関数 $f'(x)$ を表す式として正しいものを、以下から選び、その番号を へマークせよ。

- ① $3(2x - 5)(x^2 - 5x + 5)^2$
- ② $3(2x - 3)(x^2 - 5x + 5)^2$
- ③ $6(x - 1)(x^2 - 5x + 5)^2$
- ④ $3(2x - 1)(x^2 - 5x + 5)^2$
- ⑤ $3(2x + 1)(x^2 - 5x + 5)^2$
- ⑥ $3(2x + 3)(x^2 - 5x + 5)^2$
- ⑦ $6(x + 2)(x^2 - 5x + 5)^2$
- ⑧ $3(2x + 5)(x^2 - 5x + 5)^2$

$$\begin{aligned} ((x^2 - 5x + 5)^3)' &= 3(x^2 - 5x + 5)^2 \cdot (x^2 - 5x + 5)' \\ &= 3(x^2 - 5x + 5)^2 (2x - 5) \\ &= 3(2x - 5)(x^2 - 5x + 5)^2 \end{aligned}$$

【答】 ①

問題 007 (バリエーション No.1)

関数 $f(x) = \left(\frac{x^2}{-5x^2 + 4}\right)^3$ の導関数 $f'(x)$ を表す式として正しいものを、以下から選び、その番号を へマークせよ.

- ① $\frac{24x^5}{(-5x^2 + 4)^4}$
- ② $-\frac{6x^5}{(-5x^2 + 4)^4}$
- ③ $\frac{42x^5}{(-5x^2 + 4)^4}$
- ④ $-\frac{30x^5}{(-5x^2 + 4)^4}$
- ⑤ $-\frac{24x^5}{(-5x^2 + 4)^4}$
- ⑥ $\frac{18x^5}{(-5x^2 + 4)^4}$
- ⑦ $-\frac{18x^5}{(-5x^2 + 4)^4}$
- ⑧ $\frac{6x^5}{(-5x^2 + 4)^4}$

$$\begin{aligned}
 \left(\left(\frac{x^2}{-5x^2 + 4}\right)^3\right)' &= 3\left(\frac{x^2}{-5x^2 + 4}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2}{-5x^2 + 4}\right)' \\
 &= 3\left(\frac{x^2}{-5x^2 + 4}\right)^2 \cdot \frac{2x(-5x^2 + 4) - x^2(-10x)}{(-5x^2 + 4)^2} \\
 &= 3\left(\frac{x^2}{-5x^2 + 4}\right)^2 \cdot \frac{8x}{(-5x^2 + 4)^2} \\
 &= \frac{24x^5}{(-5x^2 + 4)^4}
 \end{aligned}$$

【答】 ①

問題 008 (バリエーション No.22)

関数 $f(x) = \tan \sqrt{2x+3}$ の導関数 $f'(x)$ を表す式として正しいものを、以下から選び、その番号を へマークせよ.

- ① $\frac{1}{2\sqrt{2x+3} \cos^2 \sqrt{2x+3}}$
 ② $\frac{1}{\sqrt{2x+3} \cos^2 \sqrt{2x+3}}$
 ③ $\frac{3}{2\sqrt{2x+3} \cos^2 \sqrt{2x+3}}$
 ④ $\frac{2}{\sqrt{2x+3} \cos^2 \sqrt{2x+3}}$
 ⑤ $-\frac{1}{2\sqrt{2x+3} \cos^2 \sqrt{2x+3}}$
 ⑥ $-\frac{1}{\sqrt{2x+3} \cos^2 \sqrt{2x+3}}$
 ⑦ $-\frac{3}{2\sqrt{2x+3} \cos^2 \sqrt{2x+3}}$
 ⑧ $-\frac{2}{\sqrt{2x+3} \cos^2 \sqrt{2x+3}}$

$$(\tan \sqrt{2x+3})' = \frac{(\sqrt{2x+3})'}{\cos^2 \sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3} \cos^2 \sqrt{2x+3}}$$

【答】 ①

問題 008 (バリエーション No.77)

関数 $f(x) = e^{\sqrt[6]{x^5}}$ の導関数 $f'(x)$ を表す式として正しいものを、以下から選び、その番号を へマークせよ.

- ① $\frac{e^{\sqrt[6]{x^5}}}{\sqrt[6]{x}}$
 ② $\frac{3e^{\sqrt[6]{x^5}}}{\sqrt[6]{x}}$
 ③ $\frac{5e^{\sqrt[6]{x^5}}}{\sqrt[6]{x}}$
 ④ $\frac{6e^{\sqrt[6]{x^5}}}{\sqrt[6]{x}}$
 ⑤ $\frac{e^{\sqrt[6]{x^5}}}{6\sqrt[6]{x}}$
 ⑥ $\frac{e^{\sqrt[6]{x^5}}}{3\sqrt[6]{x}}$
 ⑦ $\frac{e^{\sqrt[6]{x^5}}}{2\sqrt[6]{x}}$
 ⑧ $\frac{5e^{\sqrt[6]{x^5}}}{6\sqrt[6]{x}}$

$\sqrt[6]{x^5} = x^{\frac{5}{6}}$ より

$$\left(e^{\sqrt[6]{x^5}}\right)' = e^{\sqrt[6]{x^5}} \cdot \left(\sqrt[6]{x^5}\right)' = e^{\sqrt[6]{x^5}} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{x}} = \frac{5e^{\sqrt[6]{x^5}}}{6\sqrt[6]{x}}$$

【答】 ⑦

問題 009 (バリエーション No.15)

関数 $f(x) = \cos(\tan e^x)$ の導関数 $f'(x)$ を表す式として正しいものを、以下から選び、その番号を ヘマークせよ。

- ① $e^x \cos^2 e^x \cos(\tan e^x)$
- ② $e^x \sin^2 e^x \cos(\tan e^x)$
- ③ $-e^x \cos^2 e^x \cos(\tan e^x)$
- ④ $-e^x \sin^2 e^x \cos(\tan e^x)$
- ⑤ $\frac{e^x \cos(\tan e^x)}{\cos^2 e^x}$
- ⑥ $\frac{e^x \sin(\tan e^x)}{\cos^2 e^x}$
- ⑦ $-\frac{e^x \cos(\tan e^x)}{\cos^2 e^x}$
- ⑧ $-\frac{e^x \sin(\tan e^x)}{\cos^2 e^x}$

$$\begin{aligned} (\cos(\tan e^x))' &= -\sin(\tan e^x) \cdot (\tan e^x)' \\ &= -\sin(\tan e^x) \cdot \frac{e^x}{\cos^2 e^x} \\ &= -\frac{e^x \sin(\tan e^x)}{\cos^2 e^x} \end{aligned}$$

【答】 ⑦