［コース ID：51］　微分積分 I

51.1　関数の極限

51.1.1　関数の極限

問題 001（バリエーション No.1）

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{9x^2+10x}{5x} = \boxed{\text{ア}}$ である.

分子と分母に $\dfrac{1}{x}$ をかけると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{9x^2+10x}{5x} &= \lim_{x\to 0}\frac{9x+10}{5}\\ &= \frac{9\times 0+10}{5} = 2\end{aligned}$$

【答】　2

問題 002（バリエーション No.1）

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2} = \boxed{\text{ア}}$ である.

$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ より

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}(x+1)\\ &= 2+1=3\end{aligned}$$

【答】　3

問題 003（バリエーション No.1）

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+6x-16}{x^2+x-6} = \boxed{\text{ア}}$ である.

分子と分母をともに因数分解し, 共通の因数で約分する.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2+6x-16}{x^2+x-6} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+8)}{(x-2)(x+3)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x+8}{x+3}\\ &= \frac{2+8}{2+3}\\ &= \frac{10}{5} = 2\end{aligned}$$

【答】　2

問題 004（バリエーション No.1）

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2-5x+6}{5x^2+9x+10} = \boxed{\text{ア}}$ である.

$n \geqq 0$ のとき, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$ であるので, 分子と分母に $\dfrac{1}{x^2}$ をかけると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2-5x+6}{5x^2+9x+10} &= \lim_{x\to\infty}\frac{10-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}}{5+\dfrac{9}{x}+\dfrac{10}{x^2}} \\ &= \frac{10-0+0}{5+0+0} \\ &= \frac{10}{5}=2\end{aligned}$$

【答】　2

問題 005（バリエーション No.1）

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+4x+5}}{x+10} = \boxed{\text{ア}}$ である.

$x=\sqrt{x^2}$ に注意して, 分子と分母に $\dfrac{1}{x}$ をかけると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+4x+5}}{x+10} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}{1+\dfrac{10}{x}} \\ &= \frac{\sqrt{4+0+0}}{1+0}=2\end{aligned}$$

【答】　2

問題 006（バリエーション No.1）

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x^2+4x+1}-(x-10)\right\} = \boxed{\text{アイ}}$ である.

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ であるから

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+4x+1}-(x-10) &= \left\{\sqrt{x^2+4x+1}-(x-10)\right\}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4x+1}+(x-10)}{\sqrt{x^2+4x+1}+(x-10)} \\ &= \frac{(x^2+4x+1)-(x-10)^2}{\sqrt{x^2+4x+1}+(x-10)} \\ &= \frac{24x-99}{\sqrt{x^2+4x+1}+(x-10)}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x^2+4x+1}-(x-10)\right\} &= \lim_{x\to\infty}\frac{24x-99}{\sqrt{x^2+4x+1}+(x-10)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{24-\dfrac{99}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\left(1-\dfrac{10}{x}\right)}\\ &= \frac{24-0}{\sqrt{1+0+0}+(1-0)}\\ &= \frac{24}{2}=12\end{aligned}$$

【答】　**12**

問題 007（バリエーション No.1）

$\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+4x-3}\right\}=$ $\boxed{\text{アイ}}$ である.

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ であるから

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+4x-3} &= \left\{\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+4x-3}\right\}\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+4x-3}}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+4x-3}}\\ &= \frac{(x^2+2x+3)-(x^2+4x-3)}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+4x-3}}\\ &= \frac{-2x+6}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+4x-3}}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+4x-3}\right\} &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2x+6}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+4x-3}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2+\dfrac{6}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}}}\\ &= \frac{-2+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0+0}}\\ &= \frac{-2}{2}=-1\end{aligned}$$

【答】　$\mathbf{-1}$