［コース ID：51］　微分積分 I

51.10　接線と法線, 関数の増減

51.10.1　接線と法線

問題 001（バリエーション No.1）

曲線 $y = x^2 + x - 2$ 上の点 $(-1, -2)$ における, この曲線の接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ア}}\, x - \boxed{\text{イ}}$$

である.

$f(x) = x^2 + x - 2$ とすると

$$f'(x) = 2x + 1$$

この曲線上の点 $(-1, -2)$ における接線の傾きは

$$f'(-1) = -2 + 1 = -1$$

である. 傾きが -1 で点 $(-1, -2)$ を通る直線の方程式は

$$y - (-2) = -(x - (-1))$$

で与えられる. この式を整理すると $y = -x - 3$ となる.

【答】　$\boldsymbol{y = -x - 3}$

問題 002（バリエーション No.1）

曲線 $y = x^3 - 5x^2 - x - 1$ 上の点 $(1, -6)$ における, この曲線の接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{アイ}}\, x + \boxed{\text{ウ}}$$

である.

$f(x) = x^3 - 5x^2 - x - 1$ とすると

$$f'(x) = 3x^2 - 10x - 1$$

この曲線上の点 $(1, -6)$ における接線の傾きは

$$f'(1) = 3 - 10 - 1 = -8$$

である. 傾きが -8 で点 $(1, -6)$ を通る直線の方程式は

$$y - (-6) = -8(x - 1)$$

で与えられる. この式を整理すると $y = -8x + 2$ となる.

【答】　$\boldsymbol{y = -8x + 2}$

問題 003（バリエーション No.1）

曲線 $y = x^2 + 2x + 3$ 上の $x = 1$ における法線の方程式は

$$y = \frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}x + \frac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}$$

である.

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ とすると

$$f'(x) = 2x + 2$$

この曲線上の $x = 1$ における法線の傾きは

$$-\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{4}$$

である. また, $x = 1$ のとき $y = 1 + 2 + 3 = 6$ であるのでこの曲線は点 $(1, 6)$ を通る.
点 $(1, 6)$ を通り, 傾きが $-\frac{1}{4}$ である直線の方程式は

$$y - 6 = -\frac{1}{4}(x - 1)$$

で与えられるので, これを整理すると $y = -\frac{1}{4}x + \frac{25}{4}$ となる

【答】 $\boldsymbol{y = \frac{-1}{4}x + \frac{25}{4}}$

問題 004（バリエーション No.1）

曲線 $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ 上の $x = 2$ における法線の方程式は

$$y = \frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}x + \frac{\boxed{オカキ}}{\boxed{クケ}}$$

である.

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ とすると

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$$

この曲線の $x = 2$ における法線の傾きは

$$-\frac{1}{f(2)} = -\frac{1}{12 + 8 + 3} = -\frac{1}{23}$$

である. また $x = 2$ のとき, $y = 8 + 8 + 6 + 4 = 26$ よりこの曲線は点 $(2, 26)$ を通る.
点 $(2, 26)$ を通り, 傾きが $-\frac{1}{23}$ である直線の方程式は

$$y - 26 = -\frac{1}{23}(x - 2)$$

で与えられるので, これを整理すると $y = -\frac{1}{23}x + \frac{600}{23}$ となる

【答】 $\boldsymbol{y = \frac{-1}{23}x + \frac{600}{23}}$

51.10.2　関数の増減

問題 001（バリエーション No.1）

以下の設問において, 空欄 $\boxed{\textbf{ウ}}$ および $\boxed{\textbf{エ}}$ には, 次に示す選択肢から適するものを選び, その番号をマークせよ.

⓪ 増加
① 減少

関数 $f(x) = x^2 + 10x + 2$ は
$x <$ $\boxed{\textbf{アイ}}$ のとき $\boxed{\textbf{ウ}}$ し,
$x >$ $\boxed{\textbf{アイ}}$ のとき $\boxed{\textbf{エ}}$ する.

関数 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 2x + 10$$

よって $x < -5$ のとき $f'(x) < 0$ であり, $x > -5$ のとき $f'(x) > 0$ である.
ある区間において常に $f'(x) > 0$ が成り立つとき, その区間において関数 $f(x)$ は単調増加であり,
逆に, ある区間で常に $f'(x) < 0$ であるとき $f(x)$ は単調減少である.

【答】　$x < -5$ のとき減少し, $x > -5$ のとき増加する.

問題 002（バリエーション No.1）

以下の設問において, 空欄 $\boxed{\textbf{オ}}$ および $\boxed{\textbf{カ}}$ には, 次に示す選択肢から適するものを選び, その番号をマークせよ.

⓪ 増加
① 減少

関数 $f(x) = x^3 + 12x^2 + 45x - 3$ は
$x <$ $\boxed{\textbf{アイ}}$ および $x >$ $\boxed{\textbf{ウエ}}$ のとき $\boxed{\textbf{オ}}$ し,
$\boxed{\textbf{アイ}}$ $< x <$ $\boxed{\textbf{ウエ}}$ のとき $\boxed{\textbf{カ}}$ する.

関数 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 + 24x + 45$$

$f'(x) = 3(x + 5)(x + 3)$ より,

$$x < -5 \quad \text{または} - 3 < x \quad \text{のとき} \quad f'(x) > 0$$

$$-5 < x < -3 \quad \text{のとき} \quad f'(x) < 0$$

となる.
ある区間において常に $f'(x) > 0$ が成り立つとき, その区間において関数 $f(x)$ は単調増加であり,
逆に, ある区間で常に $f'(x) < 0$ であるとき $f(x)$ は単調減少である.

【答】　$x < -5$ および $x > -3$ のとき増加し, $-5 < x < -3$ のとき減少する.

問題 003（バリエーション No.1）

関数 $f(x) = x^3 + 3x^2$ において, その接線の傾きが負になるような x の値の範囲は

$$\boxed{\text{アイ}} < x < \boxed{\text{ウ}}$$

である. とくに, 傾きが最小となるのは $x = \boxed{\text{エオ}}$ のときであり, その時の接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{カキ}}\, x - \boxed{\text{ク}}$$

である.

関数 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$f'(x) = 3x(x+2)$ であるから, $-2 < x < 0$ のとき, $f'(x) < 0$ となる.
接線の傾きは $f'(x)$ で与えられるので, $\boldsymbol{-2 < x < 0}$ のとき, 接線の傾きは負になる.
また

$$f'(x) = 3(x+1)^2 - 3$$

であるから, 傾きが最小となるのは $\boldsymbol{x = -1}$ のときであり, そのとき $f'(x)$ は最小値 $f'(-1) = -3$ をとる. また $x = -1$ のとき, $f(-1) = 2$ より, 接線は点 $(-1, 2)$ を通る.

点 $(-1, 2)$ を通り, 傾きが -3 であるような直線の方程式は

$$y - 2 = -3(x - (-1))$$

で与えられるので, これを整理すると $\boldsymbol{y = -3x - 1}$ となる.