［コース ID：51］　微分積分 I

51.12　関数の最大・最小

51.12.1　関数の最大・最小

問題 001（バリエーション No.1）

関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3 \quad (-2 \leqq x \leqq 6)$ は
$x =$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき, 最小値 $\boxed{\text{イウエ}}$ をとり,
$x =$ $\boxed{\text{オ}}$ のとき, 最大値 $\boxed{\text{カキ}}$ をとる.

関数 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = -1, 3$ である．また

$$f(-2) = -8 - 12 + 18 + 3 = 1$$

$$f(6) = 216 - 108 - 54 + 3 = 57$$

であるので増減表は

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	8	$\searrow$	-24	$\nearrow$	57

よって $f(x)$ は $x = 3$ のとき最小値 -24, $x = 6$ のとき最大値 57 をとる.

【答】　$\boldsymbol{x = 3}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-24}$ **をとり**, $\boldsymbol{x = 6}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{57}$ **をとる**.

問題 002（バリエーション No.10）

関数 $f(x) = -x^3 + 3x - 8 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$ は
$x =$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき, 最小値 $\boxed{\text{イウエ}}$ をとり,
$x =$ $\boxed{\text{オ}}$ のとき, 最大値 $\boxed{\text{カキ}}$ をとる.

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ のとき $x = \pm 1$ である．また

$$f(0) = -8$$

$$f(3) = -27 + 9 - 8 = -26$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-8	$\nearrow$	-6	$\searrow$	-26

増減表より $x = 1$ のとき最大値 -6, $x = 3$ のとき最小値 -26 をとる.

【答】　$\boldsymbol{x = 3}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-26}$ **をとり**, $\boldsymbol{x = 1}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{-6}$ **をとる**.

問題 003（バリエーション No.21）

関数 $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 + 2}$ $(-5 \leqq x \leqq 2)$ は

$x =$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき, 最小値 $\boxed{\text{イウ}}$ をとり,

$x =$ $\boxed{\text{エオ}}$ のとき, 最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる.

関数 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x^2+2) - 2x(x^2-4x)}{(x^2+2)^2} = \frac{4x^2+4x-8}{(x^2+2)^2}$$

$f'(x) = 0$ のとき $4x^2 + 4x - 8 = 4(x+2)(x-1) = 0$ より $x = -2, 1$ である．また

$$f(-5) = \frac{25+20}{25+2} = \frac{5}{3}$$

$$f(2) = \frac{4-8}{4+2} = -\frac{2}{3}$$

であるので増減表は

x	-5	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{5}{3}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{2}{3}$

よって $f(x)$ は $x = -2$ のとき最大値 2, $x = 1$ のとき最小値 -1 をとる.

【答】　$x = 1$ のとき最小値 -1 をとり, $x = -2$ のとき最大値 2 をとる.

問題 004（バリエーション No.7）

関数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 13}$ $(-1 \leqq x \leqq 8)$ は

$x =$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき, 最小値 $\boxed{\text{イ}}$ をとり,

$x =$ $\boxed{\text{ウ}}$ のとき, 最大値 $\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ をとる.

関数 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+13}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+13}}$$

$f'(x) = 0$ のとき $x = 2$ であり, また $f(-1) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. $f(8) = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ である.

x	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$3\sqrt{5}$

よって $f(x)$ は $x = 2$ のとき最小値 3, $x = 8$ のとき最大値 $3\sqrt{5}$ をとる.

【答】　$x = 2$ のとき最小値 3 をとり, $x = 8$ のとき最大値 $3\sqrt{5}$ をとる.

問題 004（バリエーション No.22）

関数 $f(x) = x - 4\sqrt{x}$ $(0 \leqq x \leqq 25)$ は

$x =$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき, 最小値 $\boxed{\text{イウ}}$ をとり,

$x =$ $\boxed{\text{エオ}}$ のとき, 最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる.

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$f'(x) = 0$ のとき $\sqrt{x} = 2$ より $x = 4$ である．また

$$f(0) = 0 \quad f(25) = 5$$

である．

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	25
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5

よって $f(x)$ は $x = 4$ のとき最小値 -4, $x = 25$ のとき最大値 5 をとる.

【答】　$x = 4$ のとき最小値 -4 をとり, $x = 25$ のとき最大値 5 をとる.

問題 004（バリエーション No.33）

関数 $f(x) = x\sqrt{12 - x}$ $(-4 \leqq x \leqq 12)$ は
$x =$ アイ のとき, 最小値 ウエオ をとり,
$x =$ カ のとき, 最大値 キク をとる.

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \sqrt{12 - x} - \frac{x}{2\sqrt{12 - x}} = \frac{24 - 3x}{2\sqrt{12 - x}}$$

$f'(x) = 0$ のとき $24 - 3x = 0$ より $x = 8$ である．また $f(-4) = -16$,　$f(12) = 0$ であるから増減表は

x	-4	$\cdots$	8	$\cdots$	12
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-16	$\nearrow$	16	$\searrow$	0

よって $f(x)$ は $x = -4$ のとき最小値 -16 をとり, $x = 8$ のとき最大値 16 をとる.

【答】　$x = -4$ のとき最小値 -16 をとり, $x = 8$ のとき最大値 16 をとる.

問題 004（バリエーション No.36）

関数 $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$ $(-2\sqrt{2} \leqq x \leqq 2\sqrt{2})$ は
$x =$ アイ のとき, 最小値 ウエ をとり,
$x =$ オ のとき, 最大値 カ をとる.

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{8 - x^2}} = \frac{8 - 2x^2}{\sqrt{8 - x^2}}$$

$f'(x) = 0$ のとき $8 - 2x^2 = 0$ より $x = \pm 2$. また, $f(-2\sqrt{2}) = f(2\sqrt{2} = 0$ より増減表は

x	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

よって $f(x)$ は $x = -2$ で最小値 -4, $x = 2$ で最大値 4 をとる.

【答】　$x = -2$ のとき最小値 -4 をとり, $x = 2$ のとき最大値 4 をとる.

問題 005（バリエーション No.1）

以下の設問において, $\boxed{\text{ウ}}$ および $\boxed{\text{オ}}$ へは, 後の選択肢からあてはまるものを選び, その番号をマークせよ.

関数 $f(x) = xe^x$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ は

$x =$ $\boxed{\text{アイ}}$ のとき, 最小値 $\boxed{\text{ウ}}$ をとり,

$x =$ $\boxed{\text{エ}}$ のとき, 最大値 $\boxed{\text{オ}}$ をとる.

$\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ の選択肢：

0 $-\dfrac{2}{e^2}$

1 $-\dfrac{1}{e}$

2 0

3 e

4 $2e^2$

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

$f'(x) = 0$ のとき $x = -1$ である. また

$$f(-2) = -2e^{-2} \qquad f(2) = 2e^2$$

であるから増減表は

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-2e^{-2}$	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$2e^2$

よって $f(x)$ は $x = -1$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{e}$, $x = 2$ のとき最大値 $2e^2$ をとる.

【答】　$x = -1$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{e}$, $x = 2$ のとき最大値 $2e^2$ をとる.

問題 005（バリエーション No.3）

以下の設問において，$\boxed{イ}$ および $\boxed{エ}$ へは，後の選択肢からあてはまるものを選び，その番号をマークせよ．

関数 $f(x) = x\log x \quad \left(\dfrac{1}{e^2} \leqq x \leqq 2\right)$ は

$x = \dfrac{\boxed{ア}}{e}$ のとき，最小値 $\boxed{イ}$ をとり，

$x = \boxed{ウ}$ のとき，最大値 $\boxed{エ}$ をとる．

$\boxed{イ}$，$\boxed{エ}$ の選択肢：

⓪ $-\dfrac{2}{e^2}$

① $-\dfrac{1}{e}$

② 0

③ 1

④ $2\log 2$

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

$f'(x) = 0$ のとき $\log x = -1$ より $x = \dfrac{1}{e}$．また $f\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = -\dfrac{2}{e^2}$，$f(2) = 2\log 2$ であるから増減表は

x	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-2e^{-2}$	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$2\log 2$

よって $f(x)$ は $x = \dfrac{1}{e}$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{e}$ をとり，$x = 2$ のとき最大値 $2\log 2$ をとる．

【答】 $\boldsymbol{x = \dfrac{1}{e}}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{e}}$ **をとり，** $\boldsymbol{x = 2}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{2\log 2}$ **をとる．**

問題 005（バリエーション No.11）

以下の設問において，$\boxed{ウ}$ および $\boxed{オ}$ へは，後の選択肢からあてはまるものを選び，その番号をマークせよ．

関数 $f(x) = \sqrt{3 + 2\cos x} \quad \left(\dfrac{5}{3}\pi \leqq x \leqq \dfrac{9}{4}\pi\right)$ は

$x = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\pi$ のとき，最小値 $\boxed{ウ}$ をとり，

$x = \boxed{エ}\,\pi$ のとき，最大値 $\boxed{オ}$ をとる．

$\boxed{ウ}$，$\boxed{オ}$ の選択肢：

⓪ $\sqrt{5}$

① $\sqrt{3}$

② 2

③ $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$

④ $\sqrt{6}$

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{\sqrt{3+2\cos x}}$$

$f'(x)=0$ のとき, $\sin x = 0$ であるが, $\frac{5}{3}\pi \leqq x \leqq \frac{9}{4}\pi$ であるので $x = 2\pi$ である．また

$$f\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \sqrt{3+1} = 2 \quad f\left(\frac{9}{4}\pi\right) = \sqrt{3+\sqrt{2}}$$

である．増減表は

x	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π	$\cdots$	$\frac{9}{4}\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	$\sqrt{3+\sqrt{2}}$

ここで $3+\sqrt{2} > 3+1.4 > 4$ より $\sqrt{3+\sqrt{2}} > 2$ である．よって $f(x)$ は $x = \frac{5}{3}\pi$ で最小値 2, $x = 2\pi$ で最大値 $\sqrt{5}$ をとる．

【答】 $\boldsymbol{x = \frac{5}{3}\pi}$ **で最小値 2 をとり**, $\boldsymbol{x = 2\pi}$ **で最大値** $\boldsymbol{\sqrt{5}}$ **をとる**.

問題 005（バリエーション No.29）

以下の設問において, $\boxed{\text{ウ}}$ および $\boxed{\text{カ}}$ へは, 後の選択肢からあてはまるものを選び, その番号をマークせよ．

関数 $f(x) = e^x \cos x \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{7}{4}\pi\right)$ は

$x = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$ のとき, 最小値 $\boxed{\text{ウ}}$ をとり,

$x = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$ のとき, 最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる．

$\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{カ}}$ の選択肢：

⓪ $-\frac{e^{\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$

① $\frac{e^{\frac{1}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$

② 1

③ $\frac{e^{\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$

④ $-\frac{e^{\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x(\cos x - \sin x)$$

$f'(x)=0$ のとき $\cos x - \sin x = 0$．ここで

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$$

また $0 \leqq x \leqq \frac{7}{4}\pi$ のとき

$$\frac{3}{4}\pi \leqq x + \frac{3}{4}\pi \leqq \frac{5}{2}\pi$$

よって $\cos x - \sin x = 0$ のとき $x + \frac{3}{4}\pi = \pi, 2\pi$. すなわち $x = \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$ である. また

$$f(0) = 1, \quad f\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{e^{\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$$

よって増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{e^{\frac{1}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$-\frac{e^{\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$\frac{e^{\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$

よって $f(x)$ は $x = \frac{5}{4}\pi$ のとき最小値 $-\frac{e^{\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$ をとり, $x = \frac{7}{4}\pi$ のとき最大値 $\frac{e^{\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$ をとる.

【答】　$\boldsymbol{x = \frac{5}{4}\pi}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-\frac{e^{\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}}}$ **をとり**, $\boldsymbol{x = \frac{7}{4}\pi}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{\frac{e^{\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}}}$ **を とる**.

問題 005（バリエーション No.35）

以下の設問において, $\boxed{\text{イ}}$ および $\boxed{\text{オ}}$ へは, 後の選択肢からあてはまるものを選び, その番号をマークせよ.

関数 $f(x) = (x^2 + 3x + 3)e^{-x}$ $(-2 \leqq x \leqq 1)$ は

$x =$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき, 最小値 $\boxed{\text{イ}}$ をとり,

$x =$ $\boxed{\text{ウエ}}$ のとき, 最大値 $\boxed{\text{オ}}$ をとる.

$\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ の選択肢：

0. $\frac{7}{e}$
1. e
2. 3
3. $\frac{1}{e^2}$
4. e^2

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = (2x + 3)e^{-x} - (x^2 + 3x + 3)e^{-x} = -(x^2 + x)e^{-x}$$

$f'(x) = 0$ のとき $x^2 + x = 0$ より $x = -1, 0$ である. また $f(-2) = e^2,\ f(1) = 7e^{-1}$ より増減表は

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	e^2	$\searrow$	e	$\nearrow$	3	$\searrow$	$7e^{-1}$

$e > 2.7$ より $e^2 > (2.7)^2 = 7.29 > 7$, すなわち $e > 7e^{-1}$ である.

よって $f(x)$ は $x = -2$ で最大値 e^2, $x = 1$ で最小値 $7e^{-1}$ をとる.

【答】　$\boldsymbol{x = 1}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{7e^{-1}}$ **をとり**, $\boldsymbol{x = -2}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{e^2}$ **をとる**.

問題 005（バリエーション No.40）

以下の設問において, $\boxed{\text{イ}}$ および $\boxed{\text{オ}}$ へは, 後の選択肢からあてはまるものを選び, その番号をマークせよ.

関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x^4}$ $(1 \leqq x \leqq e)$ は

$x =$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき, 最小値 $\boxed{\text{イ}}$ をとり,

$x = e^{\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}}$ のとき, 最大値 $\boxed{\text{オ}}$ をとる.

$\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ の選択肢：

⓪ $\dfrac{\log 2}{16}$

① $\dfrac{1}{2e}$

② $\dfrac{1}{3e}$

③ $\dfrac{1}{4e}$

④ 0

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = -\frac{4\log x}{x^5} + \frac{1}{x^5} = \frac{-4\log x + 1}{x^5}$$

$f'(x) = 0$ とすると $-4\log x + 1 = 0$ より $x = e^{\frac{1}{4}}$. また $f(1) = 0,\ f(e) = \dfrac{1}{e^4}$ より増減表は

x	1	$\cdots$	$e^{\frac{1}{4}}$	$\cdots$	e
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{4e}$	$\searrow$	$\dfrac{1}{e^4}$

よって $f(x)$ は $x = 1$ のとき最小値 0 をとり, $x = e^{\frac{1}{4}}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{4e}$ をとる.

【答】　**$x = 1$ のとき最小値 0 をとり, $x = e^{\frac{1}{4}}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{4e}$ をとる.**