［コース ID：52］　微分積分 II

52.8　部分積分法

52.8.1　部分積分法

問題 001（バリエーション No.1）

次の不定積分を計算せよ．但し，$\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{カ}}$ については, 次の選択肢

⓪ $\sin$
① $\cos$
② $\tan$

のなかからあてはまるものを選び, その番号をマークせよ．

$$\int x\sin 2x\,dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\boxed{\text{ウ}}\,2x - \frac{\boxed{\text{エ}}\,x}{\boxed{\text{オ}}}\boxed{\text{カ}}\,2x + C$$

(ただし, C は積分定数)

二つの関数 $f(x), g(x)$ に対し部分積分法

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

が成り立つ．

$$\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)' = \sin 2x$$

であるから $f(x) = x,\ g(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$ として, 部分積分すると

$$\begin{aligned}\int x\sin 2x\,dx &= \int x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'\,dx \\ &= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int (x)'\cos 2x\,dx \\ &= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx \\ &= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x}$

問題 002（バリエーション No.1）

次の不定積分を計算せよ．但し，$\boxed{\text{イ}}$ ，$\boxed{\text{エ}}$ については，次の選択肢

⓪ sin
① cos
② tan

のなかからあてはまるものを選び，その番号をマークせよ．

$$\int x^2 \sin x\, dx = \boxed{\text{ア}}\, x\, \boxed{\text{イ}}\, x - (x^2 - \boxed{\text{ウ}})\, \boxed{\text{エ}}\, x + C$$

(ただし，C は積分定数)

部分積分法を繰り返し用いる．

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin x\, dx &= \int x^2(-\cos x)'\, dx \\
&= -x^2 \cos x + \int (x^2)' \cos x\, dx \\
&= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx \\
&= -x^2 \cos x + 2\int x(\sin x)'\, dx \\
&= -x^2 \cos x + 2\left(x \sin x - \int (x)' \sin x\, dx\right) \\
&= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2\int \sin x\, dx \\
&= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C \\
&= 2x \sin x - (x^2 - 2)\cos x + C \quad (C \text{ は積分定数})
\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{2x \sin x - (x^2 - 2)\cos x}$

問題 003（バリエーション No.1）

次の不定積分を計算せよ．ただし，C は積分定数とする．

$$\int (1-x)e^{2x}\, dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} e^{\boxed{\text{ウ}}\, x} \left(\boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}\, x \right) + C$$

部分積分

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx$$

を用いる．

$$\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' = e^{2x}$$

より $f(x)=1-x,\ g(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}$ として部分積分すると

$$\begin{aligned}\int(1-x)x^{2x}\,dx &= \int(1-x)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'\,dx\\ &= \frac{1}{2}(1-x)e^{2x}-\frac{1}{2}\int(1-x)'e^{2x}\,dx\\ &= \frac{1}{2}(1-x)e^{2x}+\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx\\ &= \frac{1}{2}(1-x)e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C\\ &= \frac{1}{4}e^{2x}(3-2x)+C\quad (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}e^{2x}(3-2x)}$

問題 004（バリエーション No.20）

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin 3x\,dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$ である.

部分積分

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

を用いる.

$$\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)' = \sin 3x$$

より $f(x)=x,\ g(x)=-\dfrac{1}{3}\cos 3x$ として部分積分すると

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin 3x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)'\,dx\\ &= \left[-\frac{1}{3}x\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(x)'\cos 3x\,dx\\ &= \frac{\pi}{9}+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos 3x\,dx\\ &= \frac{\pi}{9}+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{9}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{1}{9}\pi}$

問題 004（バリエーション No.34）

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi^2-\boxed{\text{ウ}}$ である.

部分積分

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

を繰り返し用いる．$f(x) = x^2,\ g(x) = \sin x$ とすると

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx &= \left[x^2 \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2\left(\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx\right) \\ &= \frac{\pi}{4} - 2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - 2\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\frac{1}{4}\pi^2 - 2}$

問題 005（バリエーション No.1）

次の定積分を計算せよ．解答は後の選択肢から選び，その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ．

$$\int_0^1 xe^x\, dx$$

選択肢：

⓪ 1　① $\frac{2}{e}$　② $\frac{2}{e} - 1$　③ e　④ e^2　⑤ $e^2 + 1$　⑥ $2e^3$　⑦ $\frac{3}{e^2}$

部分積分

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx$$

を用いる．$(e^x)' = e^x$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x\, dx &= \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx \\ &= e - \left[e^x\right]_0^1 \\ &= e - (e-1) = 1\end{aligned}$$

【答】 ⓪