［コース ID：52］　微分積分 II

52.9　積分法の応用

52.9.1　積分法の応用

問題 001（バリエーション No.6）

次の不定積分を計算せよ．解答は後の選択肢から選び，その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ．

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

選択肢 (但し，C は積分定数)：

0. $\dfrac{2(x+1)\sqrt{x-1}}{3}+C$
1. $\dfrac{2(x-1)\sqrt{x-1}}{3}+C$
2. $\dfrac{2(x+2)\sqrt{x-1}}{3}+C$
3. $\dfrac{2(x-2)\sqrt{x-1}}{3}+C$
4. $\dfrac{2(x+3)\sqrt{x-1}}{3}+C$
5. $\dfrac{2(x-3)\sqrt{x-1}}{3}+C$
6. $\dfrac{2(x+4)\sqrt{x-1}}{3}+C$
7. $\dfrac{2(x-4)\sqrt{x-1}}{3}+C$

$\sqrt{x-1}=t$ とおくと，$x-1=t^2$ より $x=t^2+1,\ dx=2t\,dt$ である．よって

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx &= \int \frac{t^2+1}{t}\cdot 2t\,dt\\ &= \int (2t^2+2)\,dt\\ &= \frac{2}{3}t^3+2t+C\\ &= \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-1}+C\\ &= \frac{2(x+2)\sqrt{x-1}}{3}+C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

【答】　②

問題 001（バリエーション No.11）

次の不定積分を計算せよ. 解答は後の選択肢から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

選択肢 (但し, C は積分定数)：

0. $\dfrac{2(3x^2-4x+1)\sqrt{x+1}}{15}+C$
1. $\dfrac{2(3x^2-4x+2)\sqrt{x+1}}{15}+C$
2. $\dfrac{2(3x^2-4x+3)\sqrt{x+1}}{15}+C$
3. $\dfrac{2(3x^2-4x+4)\sqrt{x+1}}{15}+C$
4. $\dfrac{2(3x^2-4x+5)\sqrt{x+1}}{15}+C$
5. $\dfrac{2(3x^2-4x+6)\sqrt{x+1}}{15}+C$
6. $\dfrac{2(3x^2-4x+7)\sqrt{x+1}}{15}+C$
7. $\dfrac{2(3x^2-4x+8)\sqrt{x+1}}{15}+C$

$\sqrt{x+1}=t$ とおくと $x+1=t^2$ より, $x^2=(t^2-1)^2,\ dx=2t\,dt$ である. よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int \frac{(t^2-1)^2}{t}\cdot 2t\,dt\\
&= \int (2t^4-4t^2+2)\,dt\\
&= \frac{2}{5}t^5-\frac{4}{3}t^3+2t+C\\
&= \sqrt{x+1}\left(\frac{2}{5}(x+1)^2-\frac{4}{3}(x+1)+2\right)+C\\
&= \frac{\sqrt{x+1}}{15}\big(6(x^2+2x+1)-20(x+1)+30\big)+C\\
&= \frac{\sqrt{x+1}}{15}\big(6x^2-8x+16\big)+C\\
&= \frac{2(3x^2-4x+8)\sqrt{x+1}}{15}+C
\end{aligned}$$

【答】 7

問題 002（バリエーション No.11）

次の不定積分を計算せよ．解答は後の選択肢から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ．

$$\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx$$

選択肢 (但し, C は積分定数)：

⓪ $-\dfrac{2x+1}{2(x+1)^2}+C$

① $-\dfrac{x+1}{(x+1)^2}+C$

② $-\dfrac{2x+3}{2(x+1)^2}+C$

③ $-\dfrac{x+2}{(x+1)^2}+C$

④ $-\dfrac{2x-1}{2(x+1)^2}+C$

⑤ $-\dfrac{x-1}{(x+1)^2}+C$

⑥ $-\dfrac{2x-3}{2(x+1)^2}+C$

⑦ $-\dfrac{x-2}{(x+1)^2}+C$

$x+1=t$ とおくと, $x=t-1$ より $dx=dt$ である．よって

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx &= \int \frac{t-1}{t^3}\,dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)dt \\ &= -\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+C \\ &= -\frac{1}{2t^2}(2t-1)+C = -\frac{2x+1}{2(x+1)^2}+C\end{aligned}$$

(別解)

$$\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{(x+1)-1}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx &= \int \left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}\right)dx \\ &= -\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}+C = -\frac{2x+1}{2(x+1)^2}+C\end{aligned}$$

としてもよい．ただし, これら 2 つの計算は $x+1$ を t と (明示的に) 置くか置かないかの差でしかない事に注意する．

【答】　⓪

問題 002（バリエーション No.21）

次の不定積分を計算せよ．解答は後の選択肢から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ．

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^4}\,dx$$

選択肢 (但し, C は積分定数)：

0. $-\dfrac{3x^2+3x+1}{3(x+1)^3}+C$
1. $-\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^3}+C$
2. $-\dfrac{3x^2+3x+5}{3(x+1)^3}+C$
3. $-\dfrac{3x^2+3x+7}{3(x+1)^3}+C$
4. $\dfrac{3x^2+3x+1}{3(x+1)^3}+C$
5. $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^3}+C$
6. $\dfrac{3x^2+3x+5}{3(x+1)^3}+C$
7. $\dfrac{3x^2+3x+7}{3(x+1)^3}+C$

$x+1=t$ とおくと, $x=t-1$ より $dx=dt$ である．よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x+1)^4}\,dx &= \int \frac{(t-1)^2}{t^4}\,dt \\
&= \int \left(\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t^3}+\frac{1}{t^4}\right) dt \\
&= -\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{3t^3}+C \\
&= -\frac{1}{3t^3}\left(3t^2-3t+1\right)+C \\
&= -\frac{1}{3(x+1)^3}\left(3(x^2+2x+1)-3(x+1)+1\right)+C = -\frac{3x^2+3x+1}{3(x+1)^3}+C
\end{aligned}$$

【答】 0

問題 003（バリエーション No.10）

次の不定積分を計算せよ．解答は後の選択肢から選び，その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ．

$$\int e^{3x} \cos 3x \, dx$$

選択肢 (但し，C は積分定数)：

⓪ $\dfrac{1}{18}e^{3x}(2\sin 3x + 3\cos 3x) + C$

① $\dfrac{1}{18}e^{3x}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C$

② $\dfrac{1}{6}e^{3x}(\sin 3x + \cos 3x) + C$

③ $\dfrac{1}{6}e^{3x}(\sin 3x - \cos 3x) + C$

④ $\dfrac{1}{18}e^{3x}(2\sin 3x + 5\cos 3x) + C$

⑤ $\dfrac{1}{18}e^{3x}(2\sin 3x - 5\cos 3x) + C$

⑥ $\dfrac{1}{6}e^{3x}(\sin 3x + 3\cos 3x) + C$

⑦ $\dfrac{1}{6}e^{3x}(\sin 3x - 3\cos 3x) + C$

部分積分を繰り返し用いると

$$\begin{aligned}\int e^{3x} \cos 3x \, dx &= \frac{1}{3}e^{3x} \sin 3x - \int e^{3x} \sin 3x \, dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x} \sin 3x - \left(-\frac{1}{3}e^{3x} \cos 3x + \int e^{3x} \cos 3x \, dx\right) \\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\left(\sin 3x + \cos 3x\right) - \int e^{3x} \cos 3x \, dx\end{aligned}$$

よって

$$2\int e^{3x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{3}e^{3x}\left(\sin 3x + \cos 3x\right) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

両辺を 2 で割れば

$$\int e^{3x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{6}e^{3x}\left(\sin 3x + \cos 3x\right) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

【答】 ②