［コース ID：52］　微分積分 II

52.3　不定積分

52.3.1　不定積分

問題 001（バリエーション No.1）

次の不定積分を求め, 解答を後の選択肢のなかから選び, その番号を ア へマークせよ.

$$\int dx$$

選択肢 (C は積分定数):

⓪ 0
① 1
② $x + C$
③ $x^2 + C$
④ $\frac{1}{2}x + C$
⑤ $\frac{1}{2}x^2 + C$
⑥ $2x + C$
⑦ $2x^2 + C$

1 が省略されていることに注意する.

$$\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C \quad (p \neq -1)$$

であるから $p = 0$ とすると

$$\int dx = x + C$$

である.

【答】　②

問題 002（バリエーション No.7）

次の不定積分を求め, 解答を後の選択肢のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$\int (x^2 + 4x)dx$$

選択肢 (C は積分定数):

⓪ $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + C$
① $\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C$
② $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + C$
③ $\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C$
④ $\frac{2}{3}x^3 + x^2 + C$
⑤ $\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C$
⑥ $\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + C$
⑦ $\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C$

定数 p, q と関数 $f(x)$, $g(x)$ に対し

$$\int \{pf(x) + qg(x)\}\, dx = p\int f(x)dx + q\int g(x)dx$$

であるから

$$\int (x^2 + 4x)dx = \int x^2dx + 4\int xdx = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + C$$

である.

【答】 ②

問題 003（バリエーション No.20）

関数 $(4x+1)^2$ の原始関数は

$$\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}x^3 + \boxed{\text{エ}}\, x^2 + x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

である.

関数 $(4x+1)^2$ を展開すると

$$(4x+1)^2 = 16x^2 + 8x + 1$$

より

$$\int (16x^2 + 8x + 1)dx = 16\int x^2dx + 8\int xdx + \int dx = \frac{16}{3}x^3 + 4x^2 + x + C$$

(別解)

関数 $f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とする．すなわち

$$F(x) = \int f(x)dx + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であるとする．このとき $F'(x) = f(x)$ であるので合成関数の微分法より，定数 a, b に対し

$$F'(ax+b) = (ax+b)'f(ax+b) = af(ax+b)$$

であるから

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

が成り立つ．これを用いると $\displaystyle\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ より

$$\int (4x+1)^2 dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}(4x+1)^3 + C$$

展開すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{12}(4x+1)^3 &= \frac{1}{12}(64x^3 + 48x^2 + 12x + 1)\\ &= \frac{16}{3}x^3 + 4x^2 + x + \frac{1}{12}\end{aligned}$$

$C + \dfrac{1}{12}$ を新しい積分定数 C で置き直せば

$$\int (4x+1)^2 dx = \frac{16}{3}x^3 + 4x^2 + x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

である．

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{16}{3}x^3 + 4x^2 + x + C}$ (**C は積分定数**)

問題 004（バリエーション No.1）

関数 $(2x+1)(x+2)$ の原始関数は

$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}x^3 + \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}x^2 + \boxed{\text{オ}}\ x + C$ (C は積分定数)

である．

関数 $(2x+1)(x+2)$ を展開すると

$$(2x+1)(x+2) = 2x^2 + 5x + 2$$

よって原始関数は

$$\begin{aligned}\int \left(2x^2 + 5x + 2\right) dx &= 2\int x^2 dx + 5\int x dx + 2\int dx + C\\ &= \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 + 2x + C}$ (**C は積分定数**)

問題 005（バリエーション No.1）

次の不定積分を求め, 解答を後の選択肢のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$\int \frac{1}{2x}dx$$

選択肢 (C は積分定数)

⓪ $\log|x| + C$
① $\frac{1}{2}\log|x| + C$
② $2\log|x| + C$
③ $\frac{2}{3}\log|x| + C$
④ $\frac{3}{2}\log|x| + C$
⑤ $-2\log|x| + C$
⑥ $-\frac{1}{2x^2} + C$
⑦ $-\frac{1}{x^2} + C$

一般に $p \neq -1$ に対し

$$\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であり, $p = -1$ のとき

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

である. よって

$$\int \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\log|x| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

【答】 ①

問題 005（バリエーション No.13）

次の不定積分を求め, 解答を後の選択肢のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$\int \frac{4}{x^5}dx$$

選択肢 (C は積分定数)

⓪ $-\dfrac{1}{x^4}+C$

① $-\dfrac{4}{x^4}+C$

② $-\dfrac{5}{x^4}+C$

③ $-\dfrac{1}{5x^4}+C$

④ $-\dfrac{1}{x^5}+C$

⑤ $-\dfrac{4}{x^5}+C$

⑥ $-\dfrac{5}{x^5}+C$

⑦ $-\dfrac{5}{x^6}+C$

不定積分の公式

$$\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1}+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

は任意の p (ただし $p \neq -1$) に対して成り立つので

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{x^5}dx &= 4\int x^{-5}dx = 4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)x^{-4}+C \\ &= -\frac{1}{x^4}+C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

【答】　⓪

問題 006（バリエーション No.6）

次の不定積分を求め, 解答を後の選択肢のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$$

選択肢 (C は積分定数)

⓪ $\sqrt{2x+1}+C$
① $\dfrac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C$
② $\dfrac{3}{4}(2x+1)^{\frac{2}{3}}+C$
③ $\dfrac{3}{2}(2x+1)^{\frac{2}{3}}+C$
④ $\dfrac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{4}}+C$
⑤ $\dfrac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{4}}+C$
⑥ $\dfrac{5}{8}(2x+1)^{\frac{4}{5}}+C$
⑦ $\dfrac{3}{5}(2x+1)^{\frac{5}{6}}+C$

$\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}=(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$ であるから

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx &= \int (2x+1)^{-\frac{1}{2}}dx\\ &= 2\cdot\frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}}+C\\ &= \sqrt{2x+1}+C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

【答】 ⓪

問題 007（バリエーション No.4）

次の不定積分を求め, 解答を後の選択肢のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$\int 2\cos(2x+1)\,dx$$

選択肢 (C は積分定数)

⓪ $-\sin(2x+1)+C$
① $\sin(2x+1)+C$
② $\sin(x^2+x)+C$
③ $-2\sin(2x+1)+C$
④ $2\sin(2x+1)+C$
⑤ $2\sin(x^2+x)+C$
⑥ $\dfrac{1}{2}\sin(2x+1)+C$
⑦ $-\dfrac{1}{2}\sin(x^2+x)+C$

三角関数の不定積分は

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

である．よって

$$\int 2\cos(2x+1)\,dx = 2 \cdot \frac{1}{2}\sin(2x+1) + C = \sin(2x+1) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

【答】 ①

問題 007（バリエーション No.6）

次の不定積分を求め，解答を後の選択肢のなかから選び，その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ．

$$\int 2^{2x}\,dx$$

選択肢 (C は積分定数)

⓪ $\dfrac{2^x}{\log 2} + C$

① $\dfrac{2^{2x}}{\log 2} + C$

② $\dfrac{2^{2x-1}}{\log 2} + C$

③ $\dfrac{2^{2x+1}}{\log 2} + C$

④ $\dfrac{2^{x^2}}{\log 2} + C$

⑤ $2\log 2 + C$

⑥ $2^{2x}\log 2 + C$

⑦ $2x\log 2 + C$

指数関数の不定積分は定数 $a > 0$ $(a \neq 1)$ に対し

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であるから

$$\int 2^{2x}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{2x}}{\log 2} + C = \frac{2^{2x-1}}{\log 2} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

【答】 ②