［コース ID：52］　微分積分 II

52.4　定積分の定義

52.4.1　定積分の定義

問題 001（バリエーション No.1）

$\displaystyle\int_{-5}^{-3}(-3x^2-7x+1)\,dx=$ $\boxed{\text{アイウ}}$ である．

定数 p, q と関数 $f(x), g(x)$ に対し

$$\int_b^a \{pf(x)+qg(x)\}\,dx = p\int_b^a f(x)\,dx + q\int_b^a g(x)\,dx$$

が成り立つことを利用する．

$$\begin{aligned}\int_{-5}^{-3}(-3x^2-7x+1)\,dx &= -3\int_{-5}^{-3}x^2\,dx - 7\int_{-5}^{-3}x\,dx + \int_{-5}^{-3}dx \\ &= \left[-x^3\right]_{-5}^{-3} - \frac{7}{2}\left[x^2\right]_{-5}^{-3} + [x]_{-5}^{-3} \\ &= (27-125) - \frac{7}{2}(9-25) + (-3-(-5)) \\ &= -98+56+2 \\ &= -40\end{aligned}$$

【答】　-40

問題 002（バリエーション No.1）

$\displaystyle\int_{-4}^{3}(-2x+5)\,dx=$ $\boxed{\text{アイ}}$ である．

定数 p, q と関数 $f(x), g(x)$ に対し

$$\int_b^a \{pf(x)+qg(x)\}\,dx = p\int_b^a f(x)\,dx + q\int_b^a g(x)\,dx$$

が成り立つことを利用する．

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{3}(-2x+5)\,dx &= -2\int_{-4}^{3}x\,dx + 5\int_{-4}^{3}dx \\ &= -\left[x^2\right]_{-4}^{3} + 5\,[x]_{-4}^{3} \\ &= -(9-16) + 5\,(3-(-4)) \\ &= 7+35 = 42\end{aligned}$$

【答】　42

問題 003（バリエーション No.1）

$$\int_2^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{\boxed{アイ} - \boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$$ である．

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ より

$$\begin{aligned}\int_2^4 \sqrt{x}\,dx &= \int_2^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_2^4 \\ &= \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(8 - 2\sqrt{2}\right) = \frac{16 - 4\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{16 - 4\sqrt{2}}{3}}$

問題 003（バリエーション No.4）

$$\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$$ である．

$(\sqrt{x}+1)^3 = (x^{\frac{1}{2}}+1)^3 = x^{\frac{3}{2}} + 3x + 3x^{\frac{1}{2}} + 1$ であるから

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}}\,dx &= \int_1^4 \left(x + 3x^{\frac{1}{2}} + 3 + x^{-\frac{1}{2}}\right)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^4 + 3\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 + 3\,[x]_1^4 + \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4 \\ &= \frac{1}{2}(16-1) + 2(8-1) + 3(4-1) + 2(2-1) \\ &= \frac{15}{2} + 14 + 9 + 2 = \frac{65}{2}\end{aligned}$$

(別解)

$\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ のとき $F'(x) = f(x)$ が成り立つことを利用する．

$$\left((\sqrt{x}+1)^4\right)' = 4(\sqrt{x}+1)^3(\sqrt{x})' = 2\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}}$$

であるから

$$\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}(\sqrt{x}+1)^4 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}}\,dx &= \left[\frac{1}{2}(\sqrt{x}+1)^4\right]_1^4 \\ &= \frac{1}{2}(3^4 - 2^4) = \frac{1}{2}(81-16) = \frac{65}{2}\end{aligned}$$

【答】 $\mathbf{\dfrac{65}{2}}$

問題 003（バリエーション No.7）

$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \cos 2x \, dx = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である．

三角関数の和積の公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

を用いると

$$\sin x\cos 2x = \frac{1}{2}\left(\sin 3x + \sin(-x)\right) = \frac{1}{2}\left(\sin 3x - \sin x\right)$$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin x\cos 2x\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\sin 3x - \sin x\right)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x\right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(-1-1) + \frac{1}{2}(-1-1) \\ &= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

(別解)

$\sin x\cos 2x = \sin x(2\cos^2 x - 1) = 2\sin x\cos^2 x - \sin x$ であり，

$$(\cos^3 x)' = -3\sin x\cos^2 x$$

であるから

$$\int \sin x\cos^2 x\,dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin x\cos 2x\,dx &= \int_0^{\pi}\left(2\sin x\cos^2 x - \sin x\right)\,dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}\cos^3 x + \cos x\right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{3}(-1-1) + (-1-1) = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

【答】 $\mathbf{\dfrac{-2}{3}}$