［コース ID：52］　微分積分 II

52.12　曲線の長さ

52.12.1　曲線の長さ

問題 001（バリエーション No.10）

曲線 $y = \dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}$ の $0 \leqq x \leqq 6$ の部分の長さは $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}} - \boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である.

$y = f(x)$ で表される曲線の $a \leqq x \leqq b$ の部分の長さは

$$\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\,dx$$

で得られる. $y' = \sqrt{x}$ より

$$\begin{aligned}\int_0^6 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx &= \int_0^6 \sqrt{1+x}\,dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^6 \\ &= \frac{2}{3}\left(7\sqrt{7} - 1\right) = \frac{14\sqrt{7} - 2}{3}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{14\sqrt{7} - 2}{3}}$

問題 002（バリエーション No.1）

曲線 $y = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ の $\sqrt{2} \leqq x \leqq 4$ の部分の長さは $\sqrt{\boxed{\text{アイ}}} - \boxed{\text{ウ}}$ である.

$y' = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ より

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^4 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx &= \int_{\sqrt{2}}^4 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2 - 1}}\,dx \\ &= \int_{\sqrt{2}}^4 \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx \\ &= \left[\sqrt{x^2 - 1}\right]_{\sqrt{2}}^4 = \sqrt{15} - 1\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\sqrt{15} - 1}$

問題 003（バリエーション No.1）

曲線 $y = \log(\sin x)$ の $\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さは $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\log\boxed{\text{ウ}}$ である.

$y' = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ なので

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+(y')^2}\,dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}\,dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} = \frac{\sin x}{2(1+\cos x)} + \frac{\sin x}{2(1-\cos x)}$$

より

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2(1+\cos x)} + \frac{\sin x}{2(1-\cos x)}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[-\log(1+\cos x)+\log(1-\cos x)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\log\frac{3}{2}-\log\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\log 3\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\log 3}$

問題 004（バリエーション No.1）

曲線 $C : y = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ において, $y \leqq 2$ であるならば

$$\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イ}}} \leqq e^x \leqq \boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$$

であり, この範囲の C の長さ L は

$$L = \boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

である.

$t = e^x$ とおく. $y \leqq 2$ のとき, $\dfrac{t+t^{-1}}{2} \leqq 2$ であるから, 両辺に $2t$ をかけて整理すると $t>0$ より

$$t^2-4t+1 \leqq 0$$

$t^2-4t+1=0$ を解くと $t = 2\pm\sqrt{3}$. よって $t^2-4t+1 \leqq 0$ のとき

$$2-\sqrt{3} \leqq e^x \leqq 2+\sqrt{3}$$

である. ここで $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}$ より

$$2-\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$$

よって $\log\left(2-\sqrt{3}\right) = -\log\left(2+\sqrt{3}\right)$ である．$2-\sqrt{3} \leqq e^x \leqq 2+\sqrt{3}$ より，

$$-\log\left(2+\sqrt{3}\right) \leqq x \leqq \log\left(2+\sqrt{3}\right)$$

また $y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ であるから, 求める長さ L は

$$\begin{aligned}
L &= \int_{-\log\left(2+\sqrt{3}\right)}^{\log\left(2+\sqrt{3}\right)} \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx \\
&= \int_{-\log\left(2+\sqrt{3}\right)}^{\log\left(2+\sqrt{3}\right)} \sqrt{1+\frac{\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)}{4}}\,dx \\
&= \int_{-\log\left(2+\sqrt{3}\right)}^{\log\left(2+\sqrt{3}\right)} \sqrt{\frac{\left(e^{2x}+2+e^{-2x}\right)}{4}}\,dx \\
&= \int_{-\log\left(2+\sqrt{3}\right)}^{\log\left(2+\sqrt{3}\right)} \sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx \\
&= \int_{-\log\left(2+\sqrt{3}\right)}^{\log\left(2+\sqrt{3}\right)} \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx = \int_0^{\log\left(2+\sqrt{3}\right)} \left(e^x+e^{-x}\right)\,dx \quad \left(e^x+e^{-x}\text{は偶関数である}\right) \\
&= \left[e^x - e^{-x}\right]_0^{\log\left(2+\sqrt{3}\right)} \\
&= \left(\left(2+\sqrt{3}\right)-\left(2-\sqrt{3}\right)\right) = 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{2-\sqrt{3} \leqq e^x \leqq 2+\sqrt{3},\ L = 2\sqrt{3}}$