［コース ID：52］　微分積分 II

52.1　高次導関数, 曲線の凹凸

52.1.1　高次導関数

問題 001（バリエーション No.4）

関数 $f(x) = \sqrt{x}$ の「第 5 次導関数 $f^{(5)}(x)$」を表す式として正しいものを, 次の選択肢のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.
選択肢：

⓪ $\dfrac{105}{8\sqrt{x^9}}$

① $-\dfrac{105}{8\sqrt{x^9}}$

② $\dfrac{75}{16\sqrt{x^9}}$

③ $-\dfrac{75}{16\sqrt{x^9}}$

④ $\dfrac{105}{32\sqrt{x^9}}$

⑤ $-\dfrac{105}{32\sqrt{x^9}}$

⑥ $\dfrac{85}{64\sqrt{x^9}}$

⑦ $-\dfrac{85}{64\sqrt{x^9}}$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ を微分していくと

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$
$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$$
$$f^{(5)}(x) = \frac{105}{32}x^{-\frac{9}{2}}$$

よって $f^{(5)}(x) = \dfrac{105}{32\sqrt{x^9}}$ である.

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{105}{32\sqrt{x^9}}}$

問題 002（バリエーション No.7）

関数 $f(x) = \sin(2x+3)$ の「第 4 次導関数 $f^{(4)}(x)$」を表す式として正しいものを, 次の選択肢のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

選択肢：

⓪ $8\cos(2x+3)$
① $-8\cos(2x+3)$
② $8\sin(2x+3)$
③ $-8\sin(2x+3)$
④ $16\cos(2x+3)$
⑤ $-16\cos(2x+3)$
⑥ $16\sin(2x+3)$
⑦ $-16\sin(2x+3)$

$f(x) = \sin(2x+3)$ を微分していくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos(2x+3) \\ f''(x) &= -4\sin(2x+3) \\ f^{(3)}(x) &= -8\cos(2x+3) \\ f^{(4)}(x) &= 16\sin(2x+3) \end{aligned}$$

よって $f^{(4)}(x) = 16\sin(2x+3)$ である.

【答】 $\boldsymbol{f^{(4)}(x) = 16\sin(2x+3)}$

問題 003（バリエーション No.7）

関数 $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ の「第 4 次導関数 $f^{(4)}(x)$」を表す式として正しいものを, 次の選択肢のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

選択肢：

⓪ $\dfrac{16}{(x+2)^5}$
① $-\dfrac{16}{(x+2)^5}$
② $\dfrac{20}{(x+2)^5}$
③ $-\dfrac{20}{(x+2)^5}$
④ $\dfrac{24}{(x+2)^5}$
⑤ $-\dfrac{24}{(x+2)^5}$
⑥ $\dfrac{32}{(x+2)^5}$
⑦ $-\dfrac{32}{(x+2)^5}$

$f(x) = \dfrac{1}{x+2} = (x+2)^{-1}$ を微分していくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(x+2)^{-2} \\ f''(x) &= 2(x+2)^{-3} \\ f^{(3)}(x) &= -6(x+2)^{-4} \\ f^{(4)}(x) &= 24(x+2)^{-5} \end{aligned}$$

よって $f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{(x+2)^5}$ である.

【答】　$\boldsymbol{f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{(x+2)^5}}$

問題 004（バリエーション No.3）

関数 $f(x) = \log(x+1)$ の「第 4 次導関数 $f^{(4)}(x)$」を表す式として正しいものを, 次の選択肢のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

選択肢：

⓪ $\dfrac{3}{(x+1)^4}$

① $-\dfrac{3}{(x+1)^4}$

② $\dfrac{4}{(x+1)^4}$

③ $-\dfrac{4}{(x+1)^4}$

④ $\dfrac{5}{(x+1)^4}$

⑤ $-\dfrac{5}{(x+1)^4}$

⑥ $\dfrac{6}{(x+1)^4}$

⑦ $-\dfrac{6}{(x+1)^4}$

$f(x) = \log(x+1)$ を微分していくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)^{-1} \\ f''(x) &= -(x+1)^{-2} \\ f^{(3)}(x) &= 2(x+1)^{-3} \\ f^{(4)}(x) &= -6(x+1)^{-4} \end{aligned}$$

よって $f^{(4)}(x) = -\dfrac{6}{(x+1)^4}$ である.

【答】　$\boldsymbol{f^{(4)}(x) = -\dfrac{6}{(x+1)^4}}$

52.1.2　曲線の凹凸

問題 001（バリエーション No.1）

関数
$$y = x^4 - 8x^3 + 18x^2$$
は $x =$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{イ}}$ をとる. また, 変曲点の x 座標の値は $\boxed{\text{ウ}}$ である.
(但し, 変曲点が 2 つ以上存在する場合は, x 座標が小さいほうの値を答えよ.)

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 32x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 48x + 32$$

$f'(x) = 4x(x-2)(x-4)$ より $f'(x) = 0$ のとき $x = 0, 2, 4$ である.
また $f''(x) = 12(x-1)(x-3)$ より $f''(x) = 0$ のとき $x = 1, 3$ より増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	11	↗	24	↘	27	↘	32	↗

よって $f(x)$ は $x = 0$ のとき最小値 0 をとる. また $x = 1, 3$ が変曲点となる.

【答】　$x = 0$ のとき最小値 0 をとる. 変曲点の x 座標は 1 である.

問題 002（バリエーション No.4）

以下の設問で, $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ にあてはまるものを後の選択肢から選び, その番号を各記号の回答欄へマークせよ.
関数 $y = x - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos x \quad (-\pi \leqq x \leqq 0)$ は,
$x =$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき最大となり,
$x =$ $\boxed{\text{イ}}$ のとき最小となる.
また, 変曲点の x 座標の値は $\boxed{\text{ウ}}$ である.

y を微分すると

$$y' = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin x$$
$$y'' = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos x$$

$-\pi \leqq x \leqq 0$ において $y' = 0$ のとき $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから, $x = -\dfrac{2}{3}\pi, -\dfrac{1}{3}\pi$ である.

また, $y''=0$ のとき $\cos x=0$ より, $x=-\dfrac{1}{2}\pi$ である. 増減表は

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}\pi$	$\cdots$	$-\dfrac{1}{3}\pi$	$\cdots$	0
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y	$-\pi+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$-\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}\pi$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{3}\pi-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

ここで

$$\left(-\pi+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)-\left(-\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}<-\frac{2}{3}\cdot 3+\sqrt{3}=-2+\sqrt{3}<0$$

$$\left(-\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}<0$$

よって y は $x=-\pi$ で最小値 $-\pi+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ をとり, $x=0$ で最大値 $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ をとる.
また, 変曲点は $x=-\dfrac{1}{2}\pi$ である.

【答】　$x=0$ のとき最大となり, $x=\pi$ のとき最小となる. 変曲点の x 座標の値は $-\dfrac{\pi}{2}$ である.

問題 003（バリエーション No.1）

関数

$$y=\frac{1}{x^2+4x+7}$$

は $x=\boxed{\text{アイ}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ をとる.
また, 変曲点の x 座標の値は $\boxed{\text{オカ}}$ および $\boxed{\text{キク}}$ である.
(ただし, $\boxed{\text{オカ}}$ と $\boxed{\text{キク}}$ の回答の順序は問わない)

y を微分すると

$$y'=-\frac{2x+4}{(x^2+4x+7)^2}$$

$$\begin{aligned}
y''&=-\frac{2(x^2+4x+7)^2-2(2x+4)(x^2+4x+7)(2x+4)}{(x^2+4x+7)^4}\\
&=-\frac{(2x^2+8x+14)-(8x^2+32x+32)}{(x^2+4x+7)^3}\\
&=\frac{6(x+1)(x+3)}{(x^2+4x+7)^3}
\end{aligned}$$

よって $y'=0$ のとき $x=-2$, $y''=0$ のとき $x=-3,-1$ である.

$$x<-2 \quad のとき \quad y'>0$$

$$-2<x \quad のとき \quad y'<0$$

であることから y は $x=-2$ で最大値 $\dfrac{1}{3}$ をとる.
また $x=-3,-1$ で $y''=0$ であり, これらの点で y' の符号が変わらないので, これらは変曲点である.

【答】　$x=-2$ のとき最大値 $\dfrac{1}{3}$ をとる. 変曲点の x 座標の値は -1 および -3 である.

問題 004（バリエーション No.1）

関数 $y = x\sqrt{8-x^2}$ は
$x =$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{イ}}$,
$x =$ $\boxed{\text{ウエ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{オカ}}$ をそれぞれとる.
また, 変曲点の x 座標の値は $\boxed{\text{キ}}$ である.

x の定義域は $-2\sqrt{2} \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ であることに注意する. y を微分すると

$$y' = \sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{8-x^2}} = \frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$$

$$\begin{aligned} y'' &= (-4x)(8-x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(8-2x^2)(8-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) \\ &= (8-x^2)^{-\frac{3}{2}}\big((-4x)(8-x^2) + x(8-2x^2)\big) \\ &= (8-x^2)^{-\frac{3}{2}}(2x^3 - 24x) \\ &= \frac{2x(x^2-12)}{\sqrt{(8-x^2)^3}} \end{aligned}$$

$y' = 0$ のとき $8 - 2x^2 = 0$ より $x = \pm 2$ であり, $y'' = 0$ のとき $-2\sqrt{2} \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ より $x = 0$ である.

$$-2\sqrt{2} \leqq x < -2 \quad \text{または} \quad 2 < x \leqq 2\sqrt{2} \quad \text{のとき} \quad y' < 0$$

$$-2 < x < 2 \quad \text{のとき} \quad y' > 0$$

であることから y は $x = -2$ で最小値 -4, $x = 2$ で最大値 4 をとる.
また $x = 0$ のとき, $y'' = 0$ かつ y' の符号は変わらないので, この点は変曲点である.

【答】　$x = 2$ のとき最大値 4, $x = -2$ のとき最小値 -4 をとる. 変曲点の x 座標の値は 0 である.