［コース ID：52］　微分積分 II

52.11　図形の面積

52.11.1　図形の面積

問題 001（バリエーション No.32）

2 つの曲線
$y = 3x^2 + x - 2$
$y = x^2 + 3x + 2$
によって囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{ア}}$ である.

まず 2 つの曲線の交点を求める.

$$3x^2 + x - 2 = x^2 + 3x + 2$$

とすると $2x^2 - 2x - 4 = 0$ より $x = -1, 2$ である. すなわち 2 つの曲線は $x = -1$ と $x = 2$ の点で交わる. また, $-1 \leqq x \leqq 2$ の区間においては

$$3x^2 + x - 2 \leqq x^2 + 3x + 2$$

であるので求める面積は

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{2} \left(x^2 + 3x + 2\right) - \left(3x^2 + x - 2\right)\, dx \\
&= -2 \int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)\, dx \\
&= -2 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-1}^{2} \\
&= -2 \left\{\frac{1}{3}(8+1) - \frac{1}{2}(4-1) - 2(2+1)\right\} \\
&= -6 + 3 + 12 = 9
\end{aligned}$$

【答】　9

問題 002（バリエーション No.1）

2 つの放物線

$y = x^2 + x + 1$

$y = -x^2 + 5x + 3$

によって囲まれた図形の面積 S を求めよう．

2 つの放物線の交点の x 座標をそれぞれ α, β(ただし, $\alpha < \beta$) とすると,

$\alpha + \beta = \boxed{\text{ア}}$, $\alpha\beta = \boxed{\text{イウ}}$

であるから, $\beta - \alpha = \boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である．

ここで S を α, β を用いて表すと,

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \boxed{\text{カキ}}\,(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \boxed{\text{カキ}}\int_\alpha^\beta \{x - \beta + (\beta - \alpha)\}(x-\beta)\,dx \\ &= \boxed{\text{カキ}}\left\{\int_\alpha^\beta (x-\beta)^2\,dx + (\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta (x-\beta)\,dx\right\} \end{aligned}$$

となり, 更に整理すると,

$S = \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}(\beta - \alpha)^{\boxed{\text{コ}}}$

を得る．従って, 求める面積 S の値は $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である．

交点を求めるために

$$x^2 + x + 1 = -x^2 + 5x + 3$$

とおくと $2x^2 - 4x - 2 = 0$ より, 両辺を 2 で割れば

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

を得る．2 つの放物線の交点の x 座標 α, β は, この方程式の 2 解であるから解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = \mathbf{2}, \quad \alpha\beta = -\mathbf{1}$$

が成り立つ．また, $\beta - \alpha > 0$ かつ

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 + 4 = 8$$

より, $\beta - \alpha = \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}$ である．$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の区間において

$$x^2 + x + 1 < -x^2 + 5x + 3$$

であるから, 求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta (-x^2 + 5x + 3) - (x^2 + x + 1)\,dx \\ &= -2\int_\alpha^\beta (x^2 - 2x - 1)\,dx \\ &= -2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -\mathbf{2}\left\{\int_\alpha^\beta (x-\beta)^2\,dx + (\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta (x-\beta)\,dx\right\} \end{aligned}$$

ここで

$$\int_\alpha^\beta (x-\beta)^2\,dx = \left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

$$\int_\alpha^\beta (x-\beta)\,dx = \left[\frac{1}{2}(x-\beta)^2\right]_\alpha^\beta = -\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2$$

であるから

$$S = -2\left\{\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3\right\} = \boldsymbol{\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3}$$

よって求める面積 S の値は $\frac{1}{3}\times\left(2\sqrt{2}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{16\sqrt{2}}{3}}$ である.

問題 003（バリエーション No.4）

曲線 $C : y = x^2 - 4x$ について, この曲線上で x 座標が $-4, 2$ であるような 2 点をそれぞれ P,Q とする. 点 P,Q における曲線 C の接線を考え, 2 つの接線の交点を R とする.
線分 PR,QR および曲線 C によって囲まれた図形の面積を S_1, 直線 PQ と曲線 C によって囲まれた図形の面積を S_2 とする.
(1) 直線 PQ の方程式は

$$y = \boxed{\text{アイ}}\,x + \boxed{\text{ウ}}$$

である. また, R の x 座標は $\boxed{\text{エオ}}$ である.
(2)$S_2 = \boxed{\text{カキ}}$ である.
(3)$S_1 = \boxed{\text{クケ}}$ であり, $S_1 : S_2$ を最も簡単な整数比で表すと

$$S_1 : S_2 = \boxed{\text{コ}} : \boxed{\text{サ}}$$

となる.

$x = -4$ のとき $y = 32$, $x = 2$ のとき $y = -4$ である. 2 点 P$(-4, 32)$, Q$(2, -4)$ を通る直線の方程式は

$$y - (-4) = \frac{-4-32}{2-(-4)}(x-2)$$

より整理すると $\boldsymbol{y = -6x + 8}$ である.
$y = x^2 - 4x$ を微分すると $y' = 2x - 4$ であるから点 P における接線の傾きは

$$2\times(-4) - 4 = -12$$

よって点 P における接線の方程式は

$$y - 32 = -12(x - (-4))$$

整理すると $y = -12x - 16$ である. 同様に点 Q における接線の傾きは

$$2\times 2 - 4 = 0$$

なので, 点 Q における接線の方程式は $y = -4$ である. 2 つの接線の交点 R の x 座標は

$$-12x - 16 = -4$$

を満たすので, これを解くと R の x 座標は $\mathbf{-1}$ であることが分かる.
直線 PQ と曲線 C によって囲まれた図形の面積 S_2 を求めよう.
$-4 \leqq x \leqq 2$ の区間では

$$x^2 - 4x < -6x + 8$$

であるので

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-4}^{2} (-6x+8) - (x^2-4x)\,dx \\ &= \int_{-4}^{2} (-x^2-2x+8)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 8x\right]_{-4}^{2} \\ &= -\frac{1}{3}\,(8-(-64)) - (4-16) + 8\,(2-(-4)) = 36 \end{aligned}$$

よって $S_2 = \mathbf{36}$ である.
また, PR, QR, C によって囲まれた図形の面積 S_1 を計算すると, R の x 座標は -1 であるから

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-4}^{-1} (x^2-4x) - (-12x-16)\,dx + \int_{-1}^{2} (x^2-4x) - (-4)\,dx \\ &= \int_{-4}^{-1} (x^2+8x+16)\,dx + \int_{-1}^{2} (x^2-4x+4)\,dx \\ &= \int_{-4}^{-1} (x+4)^2\,dx + \int_{-1}^{2} (x-2)^2\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x+4)^3\right]_{-4}^{-1} + \left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{-1}^{2} \\ &= 9 + 9 = 18 \end{aligned}$$

よって $S_1 = \mathbf{18}$ であり $S_1 : S_2$ を最も簡単な整数比で表すと

$$S_1 : S_2 = 18 : 36 = \mathbf{1} : \mathbf{2}$$

となる.

問題 004（バリエーション No.10）

曲線 $y = \sqrt{2x}$ と直線 $y = 3x$ とで囲まれた図形の面積は
$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である.

まず, 2 つの図形の交点を求める. $\sqrt{2x} = 3x$ とおいて, 両辺を 2 乗して整理すると

$$9x^2 - 2x = 0$$

これを解くと $x = 0,\ \dfrac{2}{9}$ を得る.
すなわち, 曲線 $y = \sqrt{2x}$ と直線 $y = 3x$ は $x = 0$ と $x = \dfrac{2}{9}$ の点で交わる.

$0 \leqq x \leqq \dfrac{2}{9}$ の区間では $3x \leqq \sqrt{2x}$ であるので, 求める面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{2}{9}} (\sqrt{2x} - 3x)\,dx \\
&= \left[\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3}\ x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\ x^2\right]_0^{\frac{2}{9}} \\
&= \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{27} - \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{81} = \frac{2}{81}
\end{aligned}
$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{2}{81}}$