［コース ID：52］　微分積分 II

52.10　いろいろな関数の積分

52.10.1　いろいろな関数の積分

問題 001（バリエーション No.1）

次の不定積分を計算せよ (C は積分定数とする).

$$\int \frac{5x+7}{(x+1)(x+2)}\,dx = \boxed{\text{ア}}\log\left|x+\boxed{\text{イ}}\right| + \boxed{\text{ウ}}\log\left|x+\boxed{\text{エ}}\right| + C$$

但し, $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ の解答の順序は問わない.

被積分関数 $\dfrac{5x+7}{(x+1)(x+2)}$ を部分分数分解する.

$$\frac{5x+7}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$

とすると $\dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2} = \dfrac{(a+b)x+(2a+b)}{(x+1)(x+2)}$ であるから分子を比べて

$$a+b=5, \quad 2a+b=7$$

これを解くと $a=2,\ b=3$. よって

$$\begin{aligned}\int \frac{5x+7}{(x+1)(x+2)}\,dx &= \int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+2}\right)dx \\ &= 2\log|x+1| + 3\log|x+2| + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{2\log|x+1| + 3\log|x+2|}$

問題 002（バリエーション No.1）

次の不定積分を計算せよ (C は積分定数とする).

$$\int \frac{5x+8}{x^2+3x+2}\,dx = \boxed{\text{ア}}\log\left|x+\boxed{\text{イ}}\right| + \boxed{\text{ウ}}\log\left|x+\boxed{\text{エ}}\right| + C$$

但し, $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ の解答の順序は問わない.

被積分関数 $\dfrac{5x+8}{x^2+3x+2}$ を部分分数分解する. $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ であるから

$$\frac{5x+8}{x^2+3x+2} = \frac{5x+8}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$

とする. 両辺に $(x+1)$ をかけた後, $x=-1$ を代入すると

$$\frac{5\times(-1)+8}{-1+2} = a$$

より $a=3$, また, 両辺に $x+2$ をかけた後, $x=-2$ を代入すると

$$\frac{5\times(-2)+8}{-2+1} = b$$

より $b=2$ を得る．よって

$$\begin{aligned}\int \frac{5x+8}{x^2+3x+2}\,dx &= \int \frac{5x+8}{(x+1)(x+2)}\,dx \\ &= \int \left(\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right)dx \\ &= 3\log|x+1|+2\log|x+2|+C \quad (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{3\log|x+1|+2\log|x+2|}$

問題 003（バリエーション No.1）

次の不定積分を計算せよ (C は積分定数とする).

$$\int \frac{7x+5}{(x+1)(x-1)(x+2)}\,dx = \log|x+1| + \boxed{\text{ア}}\log|x-1| - \boxed{\text{イ}}\log|x+2|+C$$

被積分関数を部分分数分解する.

$$\frac{7x+5}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+2}$$

と分解できたする．両辺に $x+1$ をかけた後, $x=-1$ を代入すると

$$\frac{7\times(-1)+5}{(-1-1)(-1+2)} = a$$

より $a=1$ を得る．同様に, 両辺に $x-1$ をかけた後 $x=1$ を代入すると

$$\frac{7+5}{(1+1)(1+2)} = b$$

より $b=2$, 両辺に $x+2$ をかけた後 $x=-2$ を代入すると

$$\frac{7\times(-2)+5}{(-2+1)(-2-1)} = c$$

より $c=-3$ を得る．以上から

$$\begin{aligned}\int \frac{7x+5}{(x+1)(x-1)(x+2)}\,dx &= \int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+2}\right)dx \\ &= \log|x+1|+2\log|x-1|-3\log|x+2|+C \quad (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{\log|x+1|+2\log|x-1|-3\log|x+2|}$

問題 004（バリエーション No.1）

次の不定積分を計算せよ (C は積分定数とする).

$$\int \frac{1}{4x^2+4x+5}\,dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\tan^{-1}\left(x+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\right)+C$$

$4x^2+4x+5 = 4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+4 = 4\left\{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+1\right\}$ より

$$x+\frac{1}{2} = \tan t$$

として置換積分すると, $dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,dt$ より

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4x^2+4x+5}\,dx &= \frac{1}{4}\int \left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right\}^{-1} dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left(\tan^2 t+1\right)^{-1}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt \\ &= \frac{1}{4}\int dt \qquad \left(\tan^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}\ \text{を用いた}\right) \\ &= \frac{1}{4}t + C = \frac{1}{4}\tan^{-1}\left(x+\frac{1}{2}\right) + C \quad (C\ \text{は積分定数})\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\tan^{-1}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}$

問題 004（バリエーション No.10）

次の不定積分を計算せよ (C は積分定数とする).

$$\int \frac{1}{x^2-10x+29}\,dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\right)+C$$

$x^2-10x+29 = (x-5)^2+4 = 4\left\{\left(\dfrac{x-5}{2}\right)^2+1\right\}$ より

$$\frac{x-5}{2} = \tan t$$

として置換積分すると $\dfrac{1}{2}\,dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,dt$ より $dx = \dfrac{2}{\cos^2 t}\,dt$. よって

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-10x+29}\,dx &= \frac{1}{4}\int \left\{\left(\frac{x-5}{2}\right)^2+1\right\}^{-1} dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left(\tan^2 t+1\right)^{-1}\cdot\frac{2}{\cos^2 t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int dt \\ &= \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-5}{2}\right) + C \quad (C\ \text{は積分定数})\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x-5}{2}\right)}$

問題 005（バリエーション No.1）

$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\,dx = \frac{\boxed{\text{ア}}+\pi}{\boxed{\text{イ}}}$ である.

$x = \sqrt{2}\sin t$ (ただし, $-\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$) として置換積分すると $dx = \sqrt{2}\cos t\,dt$ である.

また, $x=0$ のとき $t=0$, $x=1$ のとき $\sin t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より $t=\dfrac{\pi}{4}$ である. すなわち

$$x: 0 \to 1 \quad \text{のとき} \quad t: 0 \to \frac{\pi}{4}$$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき, $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2-2\sin^2 t} \cdot \sqrt{2}\cos t\,dt \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\,dt \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt\end{aligned}$$

$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ を用いると

$$\begin{aligned}2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2t + 1)\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\sin 2t + t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

以上から $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\,dx = \frac{2+\pi}{4}$ である.

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{2+\pi}{4}}$

問題 005（バリエーション No.12）

$$\int_{-\frac{1}{3}}^0 \sqrt{9x^2+6x+2}\,dx = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}} + \frac{\log\left(\boxed{\text{ウ}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}\right)}{\boxed{\text{オ}}} \text{ である.}$$

まず,

$$\sqrt{9x^2+6x+2} = \sqrt{(3x+1)^2+1}$$

なので $3x+1=t$ とおく.

このとき, $dx = \dfrac{1}{3}\,dt$ である. また $x=-\dfrac{1}{3}$ のとき $t=0$ であり, $x=0$ のとき $t=1$ であるから

$$\int_{-\frac{1}{3}}^0 \sqrt{9x^2+6x+2}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{t^2+1}\,dt$$

が成り立つ.

$$u = t + \sqrt{t^2+1}$$

とおくと, $t=0$ のとき $u=1$, $t=1$ のとき $u=1+\sqrt{2}$ である.

$u-t=\sqrt{t^2+1}$ の両辺を 2 乗して整理すると

$$t = \frac{u^2-1}{2u} = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$$

となるので, ここから

$$dt = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du = \frac{u^2+1}{2u^2}\,du$$

を得る．また

$$\sqrt{t^2+1} = u - t = u - \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$$

となるのでまとめると

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{t^2+1}\,dt &= \frac{1}{3}\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)\cdot\frac{u^2+1}{2u^2}\,du \\ &= \frac{1}{12}\int_1^{1+\sqrt{2}}\left(u+\frac{2}{u}+\frac{1}{u^3}\right)du\end{aligned}$$

ここで

$$\int\left(u+\frac{1}{u^3}\right)du = \frac{1}{2}\left(u^2-\frac{1}{u^2}\right) = \frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)\left(u-\frac{1}{u}\right) + C \quad (C\text{ は積分定数})$$

であり

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{12}\int_1^{1+\sqrt{2}}\left(u+\frac{2}{u}+\frac{1}{u^3}\right)du &= \frac{1}{6}\left[\log u\right]_1^{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{24}\left[\left(u+\frac{1}{u}\right)\left(u-\frac{1}{u}\right)\right]_1^{1+\sqrt{2}} \\ &= \frac{\log\left(1+\sqrt{2}\right)}{6} + \frac{1}{24}\Big((1+\sqrt{2})+(\sqrt{2}-1)\Big)\Big((1+\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)\Big) \\ &= \frac{\log\left(1+\sqrt{2}\right)}{6} + \frac{4\sqrt{2}}{24} \\ &= \frac{\log\left(1+\sqrt{2}\right)}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6}\end{aligned}$$

以上から $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\sqrt{9x^2+6x+2}\,dx = \frac{\log\left(1+\sqrt{2}\right)}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6}$ である．

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{6} + \dfrac{\log\left(1+\sqrt{2}\right)}{6}}$

問題 006（バリエーション No.3）

次の不定積分を計算し，解答を後の選択肢から選び，その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ．

$$\int \frac{3x}{\sqrt{x+9}-3}\,dx$$

選択肢 (C は積分定数)：

- ⓪ $(x+9)\sqrt{x+9}+9x+C$
- ① $(x+9)\sqrt{x+9}-9x+C$
- ② $2(x+9)\sqrt{x+9}+9x+C$
- ③ $2(x+9)\sqrt{x+9}-9x+C$
- ④ $2(x+9)\sqrt{x+9}+C$
- ⑤ $\sqrt{x+9}+9x+C$
- ⑥ $\sqrt{x+9}-9x+C$
- ⑦ $2\sqrt{x+9}+9x+C$

$\sqrt{x+9}=t$ とおいて置換積分すると, $x+9=t^2$ より $x=t^2-9$, $dx=2t\,dt$ である．よって

$$\begin{aligned}\int \frac{3x}{\sqrt{x+9}-3}\,dx &= \int \frac{3(t^2-9)}{t-3}\cdot 2t\,dt \\ &= \int \frac{6t(t-3)(t+3)}{t-3}\,dt \\ &= \int 6t(t+3)\,dt \\ &= \int (6t^2+18t)\,dt \\ &= 2t^3+9t^2+C \\ &= 2(x+9)\sqrt{x+9}+9(x+9)+C \\ &= 2(x+9)\sqrt{x+9}+9x+C \quad (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

$9(x+9)=9x+81$ であるが, 81 は定数なので $81+C$ を改めて C と置き直していること注意する．

【答】 ②

問題 007（バリエーション No.1）

次の不定積分を計算せよ (C は積分定数とする).
ただし, $\boxed{\text{エ}}$ については, 後の選択肢から適切なものを選び, その番号をマークせよ.

$$\int \cos x \sin 2x\,dx = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\,\boxed{\text{エ}} - \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\cos x + C$$

$\boxed{\text{エ}}$ の選択肢：

⓪ $\sin x$
① $\cos x$
② $\sin 2x$
③ $\cos 2x$
④ $\sin 3x$
⑤ $\cos 3x$

三角関数の和積の公式を用いると

$$\cos x \sin 2x = \frac{1}{2}\left(\sin(x+2x)-\sin(x-2x)\right) = \frac{1}{2}\left(\sin 3x + \sin x\right)$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}\int \cos x \sin 2x\,dx &= \frac{1}{2}\int (\sin 3x + \sin x)\,dx \\ &= -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\frac{-1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x}$