［コース ID：52］　微分積分 II

52.7　置換積分法

52.7.1　置換積分法

問題 001（バリエーション No.1）

次の不定積分を計算せよ．但し，$\boxed{\text{ウ}}$ については，次の選択肢

⓪ sin
① cos
② tan

のなかからあてはまるものを選び，その番号をマークせよ．

$$\int \sin^6 x \cos x\, dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \boxed{\text{ウ}}^{\boxed{\text{エ}}} x + C$$

(ただし，C は積分定数)

$\sin x = t$ とおくと $\cos x\, dx = dt$ より

$$\begin{aligned}\int \sin^6 x \cos x\, dx &= \int t^6\, dt \\ &= \frac{1}{7}t^7 + C \\ &= \frac{1}{7}\sin^7 x + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{\frac{1}{7}\sin^7 x}$

問題 001（バリエーション No.20）

次の不定積分を計算せよ．但し，$\boxed{\text{ウ}}$ については，次の選択肢

⓪ sin
① cos
② tan

のなかからあてはまるものを選び，その番号をマークせよ．

$$\int \frac{\sin x}{\cos^6 x}\, dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}\ \boxed{\text{ウ}}^{\boxed{\text{エ}}} x} + C$$

(ただし，C は積分定数)

$\cos x = t$ とおくと，$-\sin x\, dx = dt$ より

$$\sin x\, dx = -dt$$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos^6 x}\,dx &= -\int \frac{1}{t^6}\,dt\\ &= \frac{1}{5t^5}+C\\ &= \frac{1}{5\cos^5 x}+C \quad (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{1}{5\cos^5 x}}$

問題 002（バリエーション No.11）

次の不定積分を計算せよ．ただし，C は積分定数とする．

$$\int x\sqrt{3x^2+1}\,dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\left(3x^2+1\right)^{\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}}+C$$

$3x^2+1=t$ とおくと $6x\,dx=dt$ より

$$x\,dx=\frac{1}{6}\,dt$$

よって

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{3x^2+1}\,dx &= \frac{1}{6}\int \sqrt{t}\,dt\\ &= \frac{1}{9}t^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{1}{9}(3x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C \quad (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{1}{9}(3x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

問題 002（バリエーション No.53）

次の不定積分を計算せよ．ただし，C は積分定数とする．

$$\int x^2\sqrt{2x^3+3}\,dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\left(2x^3+3\right)^{\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}}+C$$

$2x^3+3=t$ とおくと $6x^2\,dx=dt$ より

$$x^2\,dx=\frac{1}{6}\,dt$$

よって

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{2x^3+3}\,dx &= \frac{1}{6}\int \sqrt{t}\,dt\\ &= \frac{1}{9}t^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{1}{9}(2x^3+3)^{\frac{3}{2}}+C \quad (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{1}{9}(2x^3+3)^{\frac{3}{2}}}$

問題 003（バリエーション No.2）

次の不定積分を計算せよ．ただし, C は積分定数とする．

$$\int x\log(x^2+2)\,dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\left(x^2+2\right)\left\{\log(x^2+2)-\boxed{\text{ウ}}\right\}+C$$

$x^2+2=t$ とおくと $2x\,dx=dt$ より

$$x\,dx=\frac{1}{2}\,dt$$

よって

$$\int x\log(x^2+2)\,dx=\frac{1}{2}\int \log t\,dt$$

ここで $(x\log x-x)'=\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}-1=\log x$ より

$$\int \log x\,dx = x\log x - x + C \quad (C\text{ は積分定数})$$

である．

$$\begin{aligned}\int x\log(x^2+2)\,dx &= \frac{1}{2}\,(t\log t-t)+C\\ &= \frac{1}{2}(x^2+2)\left\{\log(x^2+2)-1\right\}+C \quad (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}(x^2+2)\left\{\log(x^2+2)-1\right\}}$

問題 003（バリエーション No.30）

次の不定積分を計算せよ．ただし, C は積分定数とする．

$$\int x^3\log(x^4+10)\,dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\left(x^4+10\right)\left\{\log(x^4+10)-\boxed{\text{ウ}}\right\}+C$$

$x^4+10=t$ とおくと $4x^3\,dx=dt$ より

$$x^3\,dx=\frac{1}{4}\,dt$$

よって

$$\begin{aligned}\int x^3\log(x^4+10)\,dx &= \frac{1}{4}\log t\,dt\\ &= \frac{1}{4}\,(t\log t-t)+C\\ &= \frac{1}{4}(x^4+10)\left\{\log(x^4+10)-1\right\}+C \quad (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}(x^4+10)\left\{\log(x^4+10)-1\right\}}$

問題 004（バリエーション No.31）

次の不定積分を計算せよ．ただし, C は積分定数とする．

$$\int x^2(x^3+1)^2\,dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\left(x^3+1\right)^{\boxed{\text{ウ}}}+C$$

$x^3+1=t$ とおくと $3x^2\,dx=dt$ より

$$x^2\,dx=\frac{1}{3}\,dt$$

よって

$$\begin{aligned}\int x^2(x^3+1)^2\,dx &= \frac{1}{3}\int t^2\,dt\\ &= \frac{1}{9}\cdot t^3+C\\ &= \frac{1}{9}(x^3+1)^3+C \quad (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\frac{1}{9}(x^3+1)^3}$

問題 005（バリエーション No.21）

次の不定積分を計算せよ．ただし, C は積分定数とする．

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^4}\,dx = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}\,(x^2+1)^{\boxed{\text{エ}}}}+C$$

$x^2+1=t$ とおくと $2x\,dx=dt$ より

$$x\,dx=\frac{1}{2}\,dt$$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x^2+1)^4}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^4}\,dt\\ &= -\frac{1}{6}\cdot t^{-3}+C\\ &= -\frac{1}{6(x^2+1)^3}+C \quad (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\frac{-1}{6(x^2+1)^3}}$

問題 006（バリエーション No.1）

次の定積分を計算せよ．

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\,dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

$\sin x = t$ とおくと $\cos x \, dx = dt$ である．$x = -\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t = -1$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $t = 1$ であるから

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx &= \int_{-1}^{1} t^2 \, dt \\ &= 2\int_0^1 t^2 \, dt \\ &= 2\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

問題 006（バリエーション No.42）

次の定積分を計算せよ．

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^3 x \sin x \, dx = \frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$$

$\cos x = t$ とおくと $-\sin x \, dx = dt$ より

$$\sin x \, dx = -dt$$

$x = -\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t = 0$, $x = 0$ のとき $t = 1$ であるから

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^3 x \sin x \, dx &= \int_0^1 -t^3 \, dt \\ &= -\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1 = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{-1}{4}}$

問題 006（バリエーション No.92）

次の定積分を計算せよ．

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (\sin x + 2)^3 \cos x \, dx = \frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$$

$\sin x + 2 = t$ とおくと $\cos x \, dx = dt$ である．$x = -\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t = 1$, $x = 0$ のとき $t = 2$ であるから

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (\sin x + 2)^3 \cos x \, dx &= \int_1^2 t^3 \, dt \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(2^4 - 1\right) = \frac{15}{4}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{15}{4}}$

問題 007（バリエーション No.31）

次の定積分を計算せよ.

$$\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1}\,dx = \frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$$

$2x^2+1=t$ とおくと $4x\,dx=dt$ より

$$x\,dx = \frac{1}{4}dt$$

$x=0$ のとき $t=1$, $x=2$ のとき $t=9$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1}\,dx &= \frac{1}{4}\int_1^9 \sqrt{t}\,dt \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 \\ &= \frac{1}{6}(3^3-1) = \frac{13}{3}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{13}{3}}$

問題 008（バリエーション No.63）

次の定積分を計算せよ.

$$\int_1^4 \frac{x^2}{\sqrt{5x^3+4}}\,dx = \boxed{ア}$$

$5x^3+4=t$ とおくと $15x^2\,dx=dt$ より

$$x^2\,dx = \frac{1}{15}\,dt$$

$x=1$ のとき $t=9$, $x=4$ のとき $t=324$ であるから

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{x^2}{\sqrt{5x^3+4}}\,dx &= \frac{1}{15}\int_9^{324} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \\ &= \frac{1}{15}\left[2\sqrt{t}\right]_9^{324} \\ &= \frac{2}{15}(18-3) = 2\end{aligned}$$

【答】 **2**

問題 009（バリエーション No.1）

次の定積分を計算せよ.

$$\int_0^1 x(x^2+1)^2\,dx = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$$

$x^2+1=t$ とおくと $2x\,dx=dt$ より

$$x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$$

$x = 0$ のとき $t = 1$, $x = 1$ のとき $t = 2$ であるから

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(x^2+1)^2\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^2 t^2\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{6}(8-1) = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\frac{7}{6}}$