［コース ID：52］　微分積分 II

52.5　定積分の計算

52.5.1　微分積分法の基本定理

問題 001（バリエーション No.1）

$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = x^2 - x - 6$ であるとき, $f(x) =$ $\boxed{\text{ア}}$ $x -$ $\boxed{\text{イ}}$ である.
また定数 a の値は $\boxed{\text{ウエ}}$ または $\boxed{\text{オ}}$ である.

$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ とおくと微分積分法の基本定理より $F'(x) = f(x)$ が成り立つ．よって

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = (x^2 - x - 6)' = 2x - 1$$

またこのとき,

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)\,dt &= \int_a^x (2t-1)\,dt \\ &= \left[t^2 - t\right]_a^x \\ &= (x^2 - x) - (a^2 - a) \\ &= x^2 - x - 6\end{aligned}$$

であるから $a^2 - a = 6$ が成り立つ．$(a-3)(a+2) = 0$ より $a = -2, 3$.

【答】　$\boldsymbol{f(x) = 2x - 1}$, $\boldsymbol{a = -2}$ **または** $\boldsymbol{3}$.

問題 002（バリエーション No.1）

関数 $f(x)$ について

$$f(0) = 1, \quad f(x) = 2x + \int_0^a f(t)\,dt$$

が成り立つとき, $a = \dfrac{\boxed{\text{アイ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である.

$f(x) = 2x + \displaystyle\int_0^a f(t)\,dt$ に $x = 0$ を代入すると $f(0) = 1$ より

$$\int_0^a f(t)\,dt = 1$$

が成り立つ．よって

$$f(x) = 2x + 1$$

であり, 両辺の 0 から a までの定積分を考えると

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a (2x+1)\,dx$$

ここで左辺 $=1$ であり，

$$\begin{aligned}右辺 &= \int_0^a (2x+1)\,dx \\ &= \left[x^2+x\right]_0^a = a^2+a\end{aligned}$$

すなわち $a^2+a=1$ を得る．これを解くと $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ である．

【答】 $\boldsymbol{a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$

問題 003（バリエーション No.1）

関数 $f(x)$ について

$$\int_a^x f(t)\,dt = 3x^2-2x+2-3a$$

が成り立つとき，$f(x)=$ $\boxed{\text{ア}}$ $x-$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

また，定数 a の値は $\boxed{\text{ウ}}$ または $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である．

関数 $F(x)$ を

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt = 3x^2-2x+2-3a$$

と定めると $F'(x)=f(x)$ であるから

$$f(x)=F'(x)=6x-2$$

である．また，このとき

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)\,dt &= \int_a^x (6t-2)\,dt \\ &= \left[3t^2-2t\right]_a^x \\ &= (3x^2-2x)-(3a^2-2a) \\ &= 3x^2-2x+2-3a\end{aligned}$$

となるので $3a^2-2a=3a-2$ が成り立つ．$3a^2-5a+2=(3a-2)(a-1)=0$ より $a=\dfrac{2}{3},1$ を得る．

【答】 $\boldsymbol{f(x)=6x-2,\ a=1}$ **または** $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

問題 004（バリエーション No.1）

2 次関数 $f(x)$ が

$$\int_1^x f(t)\,dt = x^3-(a+2)x^2+3ax-3$$

を満たしている．このとき，$a=$ $\boxed{\text{ア}}$ である．

また，この放物線 $y=f(x)$ 上の点 $(1,f(1))$ における接線の方程式は

$$y=\boxed{\text{イウ}}\,x+\boxed{\text{エ}}$$

である．

一般に, 定数 a と関数 $f(x)$ に対し

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

であるので

$$\int_1^x f(t)\,dt = x^3 - (a+2)x^2 + 3ax - 3$$

に $x=1$ を代入すると

$$1-(a+2)+3a-3=0$$

を得る. これを解くと $a=2$ であり,

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x f(t)\,dt = (x^3-4x^2+6x-3)' = 3x^2-8x+6$$

である.
$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 6x-8$$

であるから $x=1$ における接線の傾きは

$$f'(1) = 6-8 = -2$$

$f(1)=3-8+6=1$ より, 点 $(1,1)$ を通り傾きが -2 であるような直線の方程式は $y=-2x+3$ である.

【答】 $\boldsymbol{a=2,\ y=-2x+3}$

52.5.2　定積分の計算

問題 001（バリエーション No.5）

$\displaystyle\int_{\frac{1}{e^2}}^{e^3} \frac{1}{x}\,dx = \boxed{\text{ア}}$ である.

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$　(C は積分定数) であるから

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{e^2}}^{e^3} \frac{1}{x}\,dx &= [\log x]_{\frac{1}{e^2}}^{e^2} \\ &= \log e^3 - \log\frac{1}{e^2} \\ &= 3-(-2) = 5\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{5}$

問題 001（バリエーション No.12）

$\displaystyle\int_4^{25}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \boxed{\text{アイ}}$ である.

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_4^{25}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right]_4^{25}\\ &= \frac{2}{3}\left(5^3-2^3\right)+2\left(5-2\right)\\ &= 78+6=84\end{aligned}$$

【答】　84

問題 002（バリエーション No.11）

次の定積分を計算し, 解答を後の選択肢から選んで, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$\int_{-1}^{1}\left(e^x - e^{-x}\right)dx$$

選択肢:

0 0
1 1
2 -1
3 $e+\dfrac{1}{e}$
4 $e-\dfrac{1}{e}$
5 $-e+\dfrac{1}{e}$
6 $2e+\dfrac{2}{e}$
7 $2e-\dfrac{2}{e}$

$f(x) = e^x - e^{-x}$ とすると

$$f(-x) = e^{-x} - e^x = -(e^x - e^{-x}) = -f(x)$$

すなわち $f(x)$ は奇関数である．よって

$$\int_{-1}^{1}\left(e^x - e^{-x}\right)dx = 0$$

である.
(別解)
素直に計算すると

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(e^x - e^{-x}\right)dx &= \left[e^x + e^{-x}\right]_{-1}^{1}\\ &= (e+e^{-1})-(e^{-1}+e)=0\end{aligned}$$

【答】　0

問題 002（バリエーション No.72）

次の定積分を計算し, 解答を後の選択肢から選んで, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$\int_0^{\frac{1}{6}\pi} (\cos x - \sin x)\ dx$$

選択肢:

⓪ $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$
① $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$
② $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$
③ $-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$
④ $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$
⑤ $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$
⑥ $\dfrac{-3+\sqrt{3}}{2}$
⑦ $-\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{6}\pi} (\cos x - \sin x)\ dx &= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{1}{6}\pi} \\ &= \left(\sin \frac{1}{6}\pi - \sin 0\right) + \left(\cos \frac{1}{6}\pi - \cos 0\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

【答】　②

問題 003（バリエーション No.1）

$$\int_{-1}^{0} \left(x^2 - x - 2\right)\ dx + \int_0^2 \left(x^2 - x - 2\right)\ dx = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$ である.

一般に, 任意の実数 a, b, c, 関数 $f(x)$ に対して

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\left(x^2-x-2\right)\,dx+\int_{0}^{2}\left(x^2-x-2\right)\,dx &= \int_{-1}^{2}\left(x^2-x-2\right)\,dx\\ &= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-1}^{2}\\ &= \left(\frac{8}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)-(4-(-2))\\ &= 3-\frac{3}{2}-6=-\frac{9}{2}\end{aligned}$$

【答】 $\mathbf{\dfrac{-9}{2}}$

問題 003（バリエーション No.5）

$\displaystyle\int_{-3}^{3}\left(3x^2-4x\right)\,dx-\int_{4}^{3}x\,(3x-4)\,dx=$ $\boxed{\text{アイ}}$ である．

一般に

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

が成り立つので

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3}\left(3x^2-4x\right)\,dx-\int_{4}^{3}x\,(3x-4)\,dx &= \int_{-3}^{3}\left(3x^2-4x\right)\,dx+\int_{3}^{4}\left(3x^2-4x\right)\,dx\\ &= \int_{-3}^{4}\left(3x^2-4x\right)\,dx\\ &= \left[x^3-2x^2\right]_{-3}^{4}\\ &= (64-32)-(-27-18)\\ &= 32+45=77\end{aligned}$$

【答】 **77**

問題 004（バリエーション No.1）

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^3-3x^2+x-2\right)\,dx=$ $\boxed{\text{アイ}}$ である．

一般に関数 $f(x)$ に対し

$$f(x)\text{ が偶関数ならば }\quad\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx$$

$$f(x)\text{ が奇関数ならば }\quad\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$$

である．x^n は n が偶数のとき偶関数, n が奇数のとき奇関数であるから

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(x^3-3x^2+x-2\right)\,dx &= 2\int_{0}^{1}\left(-3x^2-2\right)\,dx\\ &= 2\left[-x^3-2x\right]_0^1\\ &= 2\times(-3)=-6\end{aligned}$$

【答】 $\mathbf{-6}$

問題 004（バリエーション No.10）

$\displaystyle\int_{-2}^{2}x^2(2+\sin 2x)\,dx=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である．

一般に $f(x)$ が偶関数かつ $g(x)$ が奇関数ならば, $f(x)g(x)$ は奇関数である．$x^2\sin 2x$ は奇関数であるから

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}x^2(2+\sin 2x)\,dx &= 2\int_{0}^{2}2x^2\,dx\\ &= \left[\frac{4}{3}x^3\right]_0^2=\frac{32}{3}\end{aligned}$$

【答】 $\mathbf{\dfrac{32}{3}}$