［コース ID：52］　微分積分 II

52.6　いろいろな不定積分の公式

52.6.1　いろいろな不定積分の公式

問題 001（バリエーション No.2）

次の不定積分を求め, 解答を後の選択肢のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

選択肢 (C は不定積分)：

0. $\sin^{-1}\dfrac{x}{2}+C$
1. $\cos^{-1}\dfrac{x}{2}+C$
2. $\tan^{-1}\dfrac{x}{2}+C$
3. $\sin\dfrac{x}{2}+C$
4. $\cos\dfrac{x}{2}+C$
5. $\dfrac{1}{\sin^{-1}\dfrac{x}{2}}+C$
6. $\dfrac{1}{\cos^{-1}\dfrac{x}{2}}+C$
7. $\dfrac{1}{\tan^{-1}\dfrac{x}{2}}+C$

$f(x)=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ とすると

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

であるから

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

が成り立つ. $a=2$ とすれば

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\sin^{-1}\frac{x}{2}+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

である.

【答】　0

問題 002（バリエーション No.3）

次の不定積分を求め, 解答を後の選択肢のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$$

選択肢 (C は不定積分)：

0. $\sin^{-1}\dfrac{x}{3}+C$
1. $\cos^{-1}\dfrac{x}{3}+C$
2. $\tan^{-1}\dfrac{x}{3}+C$
3. $\dfrac{1}{\sin^{-1}\dfrac{x}{3}}+C$
4. $\dfrac{1}{\cos^{-1}\dfrac{x}{3}}+C$
5. $\dfrac{1}{3}\sin^{-1}\dfrac{x}{3}+C$
6. $\dfrac{1}{3}\cos^{-1}\dfrac{x}{3}+C$
7. $\dfrac{1}{3}\tan^{-1}\dfrac{x}{3}+C$

$f(x)=\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$ とすると

$$f'(x)=\frac{1}{\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{a}=\frac{a}{x^2+a^2}$$

であるから

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C\quad (C\text{ は積分定数})$$

が成り立つ. よって $a=3$ とすれば

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx=\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}+C\quad (C\text{ は積分定数})$$

である.

【答】　⑦

問題 003（バリエーション No.1）

次の不定積分を求め, 解答を後の選択肢のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$\int \frac{x^2-4}{x^2+1}\,dx$$

選択肢 (C は不定積分)：

0 $x-2\tan^{-1}x+C$
1 $x-3\tan^{-1}x+C$
2 $x-4\tan^{-1}x+C$
3 $x-5\tan^{-1}x+C$
4 $x+2\tan^{-1}x+C$
5 $x+3\tan^{-1}x+C$
6 $x+4\tan^{-1}x+C$
7 $x+5\tan^{-1}x+C$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であるから

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-4}{x^2+1}\,dx &= \int \frac{(x^2+1)-5}{x^2+1}\,dx\\ &= \int \left(1-\frac{5}{x^2+1}\right)dx = x-5\tan^{-1}x+C \qquad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

【答】 3

問題 004（バリエーション No.1）

次の不定積分を求め, 解答を後の選択肢のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

選択肢 (C は不定積分)：

0 $2x-\tan^{-1}x+C$
1 $2x-2\tan^{-1}x+C$
2 $3x-3\tan^{-1}x+C$
3 $2x-4\tan^{-1}x+C$
4 $2x-5\tan^{-1}x+C$
5 $\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C$
6 $\log\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|+C$
7 $\log\left|\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right|+C$

$f(x) = \log\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|$ とすると

$$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x + \sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

であるから

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \log\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

が成り立つ．$a = 1$ とすれば

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \log\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

【答】　⑤

問題 005（バリエーション No.21）

$\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{-\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}\pi$ である．

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{3}}^{-\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \left[\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_{-\sqrt{3}}^{-\sqrt{2}} \\ &= \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$, $\sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$ なので

$$\int_{-\sqrt{3}}^{-\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{12}$$

【答】　$\boldsymbol{\dfrac{1}{12}\pi}$

問題 006（バリエーション No.22）

$\displaystyle\int_{-2\sqrt{3}}^{-2} \frac{2}{x^2+4}\,dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}\pi$ である．

$$\int \frac{a}{x^2+a^2}\,dx = \tan^{-1}\frac{x}{a} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_{-2\sqrt{3}}^{-2} \frac{2}{x^2+4}\,dx &= \left[\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_{-2\sqrt{3}}^{-2} \\ &= \tan^{-1}(-1) - \tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ より $\tan^{-1}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$, $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$ である．よって

$$\int_{-2\sqrt{3}}^{-2} \frac{2}{x^2+4}\,dx = -\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{12}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{1}{12}\pi}$

問題 007（バリエーション No.1）

$\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x^2-7}}\,dx = \log\left(\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イ}}}\right)$ である．

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \log\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x^2-7}}\,dx &= \left[\log\left|x+\sqrt{x^2-7}\right|\right]_3^4 \\ &= \log 7 - \log(3+\sqrt{2}) \\ &= \log\left(\frac{7}{3+\sqrt{2}}\right) \\ &= \log\left(\frac{7(3-\sqrt{2})}{3^2-2}\right) = \log\left(3-\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\log\left(3-\sqrt{2}\right)}$