［コースID：52］　微分積分 II

52.2　媒介変数と微分法, 速度・加速度

52.2.1　媒介変数と微分法

問題 001（バリエーション No.1）

点 $\mathrm{P}(x, y)$ が, θ を媒介変数とする以下の関係を満たしながら座標平面上を動くとする.

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin^2\theta + 1 \end{cases}$$

このとき, 点 P の描く軌跡は, 曲線

$y = \boxed{\text{ア}}\, x^2 + \boxed{\text{イ}}$

の $\boxed{\text{ウエ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{オ}}$ の部分である.

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - x^2$ より

$$\begin{aligned} y &= \sin^2\theta + 1 \\ &= 1 - \cos^2\theta + 1 \\ &= -x^2 + 2 \end{aligned}$$

また, $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より $-1 \leqq x \leqq 1$ である.

【答】　$\boldsymbol{y = -x^2 + 2}$ **の** $\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 1}$ **の部分.**

問題 002（バリエーション No.3）

θ を媒介変数とする, 次式

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

で表された曲線の, $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$ における接線の方程式は

$$y = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}x + \frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である.

媒介変数 θ で表示された式に対して

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}$$

であるので,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d}{d\theta}(\sin\theta)}{\dfrac{d}{d\theta}(\cos\theta)} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

よって $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ における接線の傾きは

$$-\frac{\cos\dfrac{2}{3}\pi}{\sin\dfrac{2}{3}\pi}=-\frac{-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

である. また, $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき

$$x=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$$

$$y=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

なので, 点 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通り, 傾きが $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ であるような直線の方程式は

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+\frac{1}{2})$$

整理すると $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ となる.

【答】 $\boldsymbol{y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

問題 003（バリエーション No.1）

θ を媒介変数とする, 次式

$$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$$

で表された曲線の, $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ における接線の方程式は

$$y=\boxed{\quad ア\quad}x+\boxed{\quad イ\quad}$$

である.

y を x で微分すると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\right)}{\dfrac{d}{d\theta}\left(\sqrt{3}\cos\theta\right)}=-\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}\sin\theta}$$

よって $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ における接線の傾きは

$$-\frac{\cos\dfrac{\pi}{6}}{\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{6}}=-1$$

また, このとき $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{2}$ であるので, 点 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ を通り, 傾きが -1 であるような直線の方程式は

$$y-\frac{1}{2}=-(x-\frac{1}{2})$$

よって接点の方程式は $y=-x+1$ である.

【答】　$\boldsymbol{y = -x + 1}$

問題 004（バリエーション No.1）

t を媒介変数とし, 以下の式で表される曲線 C を考える.

$$\begin{cases} x = 2^t + 2^{-t} \\ y = 2^t - 2^{-t} \end{cases}$$

この曲線 C 上の点 $\left(\dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}, \dfrac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}} \right)$ において, $\dfrac{dy}{dx} = 2$ となる.

y を x で微分すると,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{2^t + 2^{-t}}{2^t - 2^{-t}}$$

よって $\dfrac{dy}{dx} = 2$ のとき

$$2^t + 2^{-t} = 2(2^t - 2^{-t})$$

であるので両辺に 2^t をかけて整理すると

$$2^{2t} = 3$$

$2^{2t} = (2^t)^2$ かつ $2^t > 0$ より

$$2^t \quad = \sqrt{3}$$

を得る. よって

$$x = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$y = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

において $\dfrac{dy}{dx} = 2$ が成り立つ.

【答】　$\boldsymbol{\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \right)}$

52.2.2　速度と加速度

問題 001（バリエーション No.1）

数直線上を動く点 P の座標 x が, 時刻 t の関数として

$$x = 3\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

と表されるとき, $t = \dfrac{1}{3}$ における点 P の速度は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$, 加速度は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi^2$ である.

座標 x が時刻 t の関数で表されているとき, その速度は x', 加速度は x'' で表される.

$$x' = -3\pi \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x'' = -3\pi^2 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$x',\ x''$ に $t = \dfrac{1}{3}$ をそれぞれ代入すると

$$x' = -3\pi \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}\pi$$

$$x'' = -3\pi^2 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi^2$$

となる.

【答】　速度は $\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}$, 加速度は $\boldsymbol{\frac{-3\sqrt{3}}{2}\pi^2}$

問題 002（バリエーション No.1）

数直線上を動く点 P の座標 x が, 時刻 t の関数として

$$x = 2t^3 + 5t^2 - 2t - 1$$

と表されるとき, $t = 1$ における点 P の速度は $\boxed{\text{アイ}}$, 加速度は $\boxed{\text{ウエ}}$ である.

座標 x が時刻 t の関数で表されているとき, その速度は x', 加速度は x'' で表される.

$$x' = 6t^2 + 10t - 2$$

$$x'' = 12t + 10$$

$x',\ x''$ に $t = 1$ をそれぞれ代入すると, $x' = 14$, $x'' = 22$ となる.

【答】　速度は 14, 加速度は 22 である.

問題 003（バリエーション No.1）

座標平面上を動く点 P の座標 (x, y) が時刻 t の関数として

$$\begin{cases} x = -4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 \\ y = 5t^3 - 7t^2 - 4t + 1 \end{cases}$$

と表されるとき, $t = 1$ における点 P の速さ (速度の大きさ) は $\boxed{\text{ア}}$, 加速度の大きさは $\boxed{\text{イウ}}$ である.

x, y をそれぞれ t で微分すると

$$x' = -12t^2 + 12t - 4 \qquad x'' = -24t + 12$$

$$y' = 15t^2 - 14t - 4 \qquad y'' = 30t - 14$$

$t = 1$ を代入するとそれぞれ $x' = -4,\ x'' = -12,\ \ y' = -3,\ y'' = 16$ となる.
よって速度と加速度の大きさはそれぞれ

$$v = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

$$a = \sqrt{(-12)^2 + 16^2} = 4\sqrt{3^2 + 4^2} = 20$$

となる.

【答】　速さは 5, 加速度の大きさは 20.

問題 004（バリエーション No.1）

$xy = 1$ 上の動点 P が, y 座標が一定の速さ 2 で変化するように移動するとき, $x = 2$ における P の速さ (速度の大きさ) は $\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}$, 加速度の大きさは $\boxed{\text{エオ}}$ である.

y 座標が一定の速さ 2 で変化することから, $y' = \dfrac{dy}{dt} = 2$ とかける. またこのことから y 方向の加速度は $y'' = 0$ である. $x = \dfrac{1}{y}$ であるから合成関数の微分法を用いて

$$x' = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dt} = -\frac{2}{y^2}$$

$x = 2$ のとき $y = \dfrac{1}{2}$ であるから, このときの x 方向の速度は $x' = -\dfrac{2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = -8$ である. 同様に

$$x'' = \frac{4}{y^3}\frac{dy}{dt} = \frac{8}{y^3}$$

であり, $y = \dfrac{1}{2}$ を代入すると $x'' = 64$ となる.
よって点 P の速さ, 加速度の大きさはそれぞれ

$$v = \sqrt{(-8)^2 + 2^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$a = \sqrt{64^2 + 0^2} = 64$$

となる.

【答】　速さは $2\sqrt{17}$, 加速度の大きさは 64 である.

52.2.3　平均値の定理