［コース ID：52］　微分積分 II

52.13　立体の体積

52.13.1　立体の体積

問題 001（バリエーション No.12）

曲線 $y = x^3$, 直線 $x = 2$, および x 軸によって囲まれた部分を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$ である.

x $(0 \leqq x \leqq 2)$ を固定した時の回転体の断面積は

$$\pi y^2 = \pi x^6$$

であるから, 立体の体積は

$$\begin{aligned}\int_0^2 \pi x^6\,dx &= \pi\left[\frac{1}{7}x^7\right]_0^2 \\ &= \frac{128}{7}\pi\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{\dfrac{128}{7}\pi}$

問題 001（バリエーション No.13）

曲線 $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, 直線 $x = 1,\ x = e$, および x 軸によって囲まれた部分を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積は $\boxed{\text{ア}}$ π である.

x $(1 \leqq x \leqq e)$ を固定した時の回転体の断面積は

$$\pi y^2 = \frac{4\pi}{x}$$

であるので, 回転体の体積は

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{4\pi}{x}\,dx &= [4\pi\log x]_1^e \\ &= 4\pi\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{4\pi}$

問題 002（バリエーション No.1）

以下の問いに答え, 空欄にあてはまるものを後の選択肢から選び, その番号を解答欄へマークせよ.
曲線 $y = e^x$, 直線 $x = 2,\ x = 3$, および x 軸で囲まれた図形を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積は $\boxed{\text{ア}}$ である.
選択肢:

⓪ $\dfrac{\pi}{2}\left(e^2 - e\right)$
① $\dfrac{\pi}{2}\left(e^4 - e^2\right)$
② $\dfrac{\pi}{2}\left(e^4 - e^3\right)$
③ $\dfrac{\pi}{2}\left(e^5 - e^3\right)$
④ $\dfrac{\pi}{2}\left(e^5 - e^4\right)$
⑤ $\dfrac{\pi}{2}\left(e^6 - e^3\right)$
⑥ $\dfrac{\pi}{2}\left(e^6 - e^4\right)$
⑦ $\dfrac{\pi}{2}\left(e^6 - e^5\right)$

$x\ (2 \leqq x \leqq 3)$ を固定した時の回転体の断面積は

$$\pi y^2 = \pi e^{2x}$$

であるから, 回転体の体積は

$$\begin{aligned}\int_2^3 \pi e^{2x}\,dx &= \frac{\pi}{2}\left[e^{2x}\right]_2^3 \\ &= \frac{\pi}{2}\left(e^6 - e^4\right)\end{aligned}$$

【答】　⑥

問題 002（バリエーション No.10）

以下の問いに答え, 空欄にあてはまるものを後の選択肢から選び, その番号を解答欄へマークせよ.

曲線 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, 直線 $x = 0,\ x = 1$, および x 軸で囲まれた図形を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積は $\boxed{\text{ア}}$ である.

選択肢:

0 $\dfrac{\pi}{8}\left(e^2 + 4 - e^{-2}\right)$
1 $\dfrac{\pi}{8}\left(e^2 - 4 - e^{-2}\right)$
2 $\dfrac{\pi}{8}\left(e^2 + 2 - e^{-2}\right)$
3 $\dfrac{\pi}{8}\left(e^2 - 2 - e^{-2}\right)$
4 $\dfrac{\pi}{8}\left(e^2 + 1 - e^{-2}\right)$
5 $\dfrac{\pi}{8}\left(e^2 - 1 - e^{-2}\right)$
6 $\dfrac{\pi}{8}\left(e^2 + 8 - e^{-2}\right)$
7 $\dfrac{\pi}{8}\left(e^2 - 8 - e^{-2}\right)$

x $(0 \leqq x \leqq 1)$ を固定した時の回転体の断面積は

$$\pi y^2 = \pi\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right)$$

であるから, 回転体の体積は

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\pi}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right)\,dx &= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{8}\left(e^2 + 4 - e^{-2}\right)\end{aligned}$$

【答】 0

問題 002（バリエーション No.29）

以下の問いに答え, 空欄にあてはまるものを後の選択肢から選び, その番号を解答欄へマークせよ.
曲線 $y=\cos x$, 直線 $x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}$, および x 軸で囲まれた図形を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積は $\boxed{\text{ア}}$ である.
選択肢:

⓪ $\dfrac{\pi^2}{4}$
① $\dfrac{\pi^3}{4}$
② $\dfrac{\pi^4}{4}$
③ $\dfrac{\pi^2}{2}$
④ $\dfrac{\pi^3}{2}$
⑤ $\dfrac{\pi^4}{2}$
⑥ $\dfrac{\pi^2}{3}$
⑦ $\dfrac{\pi^3}{3}$

$x\ (0 \leqq x \leqq 1)$ を固定した時の回転体の断面積は

$$\pi y^2 = \pi \cos^2 x$$

であるから, 回転体の体積は

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \cos^2 x\,dx &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(\cos 2x + 1\right)\,dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

【答】 ⓪

問題 003（バリエーション No.10）

曲線

$$y = x^2 + 2x + 2$$

と直線

$$y = 3x + 2$$

で囲まれた部分を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}\pi$ である.

まず 2 つの図形の交点を求める.

$$x^2 + 2x + 2 = 3x + 2$$

おくと $x^2 - x = 0$ より, $x = 0, 1$ である. よってこれら 2 つの図形は $x=0$ と $x=1$ の点で交わる.
また, $0 \leqq x \leqq 1$ の区間において

$$x^2 + 2x + 2 \leqq 3x + 2$$

であるから, 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V = &(y = 3x + 2 \text{ と } x = 0,\ x = 1,\ \text{および } x \text{ 軸で囲まれた部分を} \\ &\qquad x \text{ 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積}) \\ &-(y = x^2 + 2x + 2 \text{ と } x = 0,\ x = 1,\ \text{および } x \text{ 軸で囲まれた部分を} \\ &\qquad x \text{ 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積}) \end{aligned}$$

が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi\,(3x+2)^2\,dx - \int_0^1 \pi\left(x^2+2x+2\right)^2\,dx \\ &= \pi\int_0^1 \big((9x^2+12x+4)-(x^4+4x^3+8x^2+8x+4)\big)\,dx \\ &= \pi\int_0^1 \left(-x^4-4x^3+x^2+4x\right)dx \\ &= \pi\left[-\frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^1 \\ &= \pi\left(-\frac{1}{5} - 1 + \frac{1}{3} + 2\right) = \frac{17}{15}\pi \end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{17}{15}\pi}$

問題 004（バリエーション No.13）

曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ と直線 $y = 1,\ y = 2$ および y 軸によって囲まれた部分を, y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$ である.

$x = \dfrac{1}{y}$ より, y $(1 \leqq y \leqq 2)$ を固定した時の回転体の断面積は

$$\pi x^2 = \frac{\pi}{y^2}$$

であるから求める回転体の体積は

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\pi}{y^2}\,dy &= \pi\left[-\frac{1}{y}\right]_1^2 \\ &= \pi\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\pi}$

問題 004（バリエーション No.18）

曲線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ と直線 $y = 1,\ y = 3$ および y 軸によって囲まれた部分を, y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}\pi$ である.

$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ のとき $x=\dfrac{1}{y^2}$ より, y $(1 \leqq y \leqq 3)$ を固定した時の回転体の断面積は

$$\pi x^2 = \frac{\pi}{y^4}$$

である. よって求める回転体の体積は

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{\pi}{y^4}\,dy &= \pi\left[-\frac{1}{3y^3}\right]_1^3\\ &= \frac{\pi}{3}\left(-\frac{1}{27}+1\right) = \frac{26}{81}\pi\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{26}{81}\pi}$

問題 005（バリエーション No.1）

曲線 $y=\log x$, 直線 $y=0,\ y=1$, および y 軸によって囲まれた部分を, y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

解答は以下の選択肢から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ. 選択肢:

0 $\dfrac{\pi}{2}\left(e^2+1\right)$
1 $\dfrac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)$
2 $\dfrac{\pi}{2}\left(e^3+1\right)$
3 $\dfrac{\pi}{2}\left(e^3-1\right)$
4 $\dfrac{\pi}{2}\left(e^4+1\right)$
5 $\dfrac{\pi}{2}\left(e^4-1\right)$
6 $\dfrac{\pi}{2}\left(e^5+1\right)$
7 $\dfrac{\pi}{2}\left(e^5-1\right)$

$y=\log x$ のとき $x=e^y$ であるから, y $(0 \leqq y \leqq 1)$ を固定した時の回転体の断面積は

$$\pi x^2 = \pi e^{2y}$$

よって求める回転体の体積は

$$\begin{aligned}\int_0^1 \pi e^{2y}\,dy &= \pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^1\\ &= \frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)\end{aligned}$$

【答】 1