［コース ID：53］　微分積分 III

53.10　合成関数の微分法

53.10.1　合成関数の微分法

問題 001（バリエーション No.10）

全微分可能な関数 $z = 3x + 5y$ において,

$$x = e^{3t}, \quad y = e^{-3t}$$

のとき, $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ.
解答は次の選択肢から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

⓪ $3e^{3t} + 5e^{-3t}$
① $3e^{3t} - 5e^{-3t}$
② $9e^{t} - 10e^{-3t}$
③ $9e^{t} - 15e^{-t}$
④ $6e^{3t} - 10e^{-3t}$
⑤ $9e^{3t} - 10e^{-3t}$
⑥ $9e^{3t} + 15e^{-3t}$
⑦ $9e^{3t} - 15e^{-3t}$

合成関数の微分法を用いて

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= 3 \cdot 3e^{3t} + 5 \cdot (-3e^{-3t}) \\ &= 9e^{3t} - 15e^{-3t}\end{aligned}$$

【答】　⑦

問題 002（バリエーション No.1）

全微分可能な関数 $z = \sin x \cos y$ において,

$$x = e^t, \quad y = e^{-t}$$

のとき, $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ.
解答は次の選択肢から選び, その番号を ア へマークせよ.

⓪ $e^t \sin(e^t)\sin(e^t) + e^t \cos(e^{-t})\cos(e^t)$
① $e^{-t} \sin(e^{-t})\sin(e^t) + e^t \cos(e^t)\cos(e^t)$
② $e^{-t} \sin(e^{-t})\sin(e^t) + e^t \cos(e^{-t})\cos(e^t)$
③ $e^t \sin(e^t)\sin(e^{-t}) + e^t \cos(e^t)\cos(e^t)$
④ $e^t \sin(e^t)\sin(e^t) + e^t \cos(e^t)\cos(e^t)$
⑤ $e^{-t} \sin(e^{-t})\cos(e^t) + e^t \cos(e^{-t})\sin(e^t)$
⑥ $e^t \sin(e^t)\cos(e^t) + e^t \cos(e^{-t})\sin(e^t)$
⑦ $e^{-t} \sin(e^{-t})\cos(e^{-t}) + e^t \cos(e^{-t})\sin(e^{-t})$

合成関数の微分法を用いて

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= \cos(e^t)\cos(e^{-t})e^t + \sin(e^t)\left(-\sin(e^{-t})\right)(-e^{-t}) \\ &= e^{-t}\sin(e^{-t})\sin(e^t) + e^t\cos(e^{-t})\cos(e^t)\end{aligned}$$

【答】 ②

問題 003（バリエーション No.2）

全微分可能な関数 $z = xy$ において,

$$x = t^3 + t, \quad y = t^3$$

のとき, $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ.
解答は次の選択肢から選び, その番号を ア へマークせよ.

⓪ $2t^3(3t^2+2)$
① $t^3(5t+4)$
② $t^4(7t^2+5)$
③ $2t^5(4t^2+3)$
④ $t^4(6t+5)$
⑤ $t^5(7t+6)$
⑥ $2t^4(3t+5)$
⑦ $t^6(8t+7)$

合成関数の微分法を用いて

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= t^3(3t^2+1) + (t^3+t)3t^2 \\ &= 3t^5 + t^3 + 3t^5 + 3t^3 \\ &= 2t^3(3t^2+2)\end{aligned}$$

【答】 0

問題 004（バリエーション No.3）

全微分可能な関数 $z = \dfrac{x+y}{xy}$ において,

$$x = t^3 + 3t, \quad y = t^2$$

のとき, $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ.

解答は次の選択肢から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

0 $-\dfrac{2t^2+15t+24}{t^3(t+3)^2}$

1 $-\dfrac{(t+4)(2t+3)}{t^3(t+2)^2}$

2 $-\dfrac{2t^4+3t^3+12t^2+3t+18}{t^3(t^2+3)^2}$

3 $-\dfrac{2(3t^2+8t+6)}{t^4(t+2)^2}$

4 $-\dfrac{2t^3+6t^2+18t+27}{t^4(t+3)^2}$

5 $-\dfrac{3(2t^2+8t+9)}{t^4(t+3)^2}$

6 $-\dfrac{2t^3+5t^2+12t+12}{t^4(t+2)^2}$

7 $-\dfrac{2(2t^2+5t+4)}{t^3(t+2)^2}$

$z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ であるから, 合成関数の微分法を用いて

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= -\frac{3t^2+3}{(t^3+3t)^2} - \frac{2t}{(t^2)^2} \\ &= -\frac{t^4(3t^2+3)+2t(t^3+3t)^2}{t^6(t^2+3)^2} \\ &= -\frac{t(3t^2+3)+2(t^2+3)^2}{t^3(t^2+3)^2} = -\frac{2t^4+3t^3+12t^2+3t+18}{t^3(t^2+3)^2}\end{aligned}$$

【答】 2

問題 005（バリエーション No.50）

全微分可能な関数 $z = x^2 + y^2$ において,

$$x = 3u + 4v, \quad y = 2u^2 + 3v$$

のとき, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ.
解答は次の選択肢から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

0. $2(u^2 + 6u + 5v)$
1. $2(2u^2 + 12u + 17v)$
2. $2(2u^2 + 6u + 5v)$
3. $4(u^2 + 6u + 10v)$
4. $2(3u^2 + 12u + 25v)$
5. $2(u^2 + 12u + 17v)$
6. $2(6u^2 + 12u + 25v)$

合成関数の微分法から

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\ &= 2(3u + 4v) \cdot 4 + 2(2u^2 + 3v) \cdot 3 \\ &= 12u^2 + 24u + 50v \\ &= 2(6u^2 + 12u + 25v)\end{aligned}$$

【答】 6

問題 006（バリエーション No.5）

全微分可能な関数 $z = x^2y^2$ において,

$$x = u\cos 2v, \quad y = u\sin v$$

のとき, $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ を求めよ.
解答は次の選択肢から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

0. $4u^3\cos^2 v\sin^2 v$
1. $4u^3\cos^2 v\sin^2(2v)$
2. $16u^3\cos^2 v\sin^2 v$
3. $16u^3\cos^2(2v)\sin^2 v$
4. $4u^3\cos^2(2v)\sin^2 v$
5. $16u^3\cos^2(2v)\sin^2 v$
6. $4u^3\cos^2(2v)\sin^2(2v)$

合成関数の微分法から

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= 2u\cos(2v)\cdot u^2\sin^2 v\cdot\cos(2v) + 2u^2\cos^2(2v)\cdot u\sin v\cdot\sin v \\ &= 2u^3\cos^2(2v)\sin^2 v + 2u^3\cos^2(2v)\sin^2 v \\ &= 4u^3\cos^2(2v)\sin^2 v\end{aligned}$$

【答】 ④

問題 007（バリエーション No.6）

全微分可能な関数 $z = \dfrac{y}{x}$ において,

$$x = u^2 + 2v, \quad y = u + 2v^2$$

のとき, $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ を求めよ.

解答は次の選択肢から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

⓪ $-\dfrac{u^2+2uv^2-2v}{(u^2+2v)^2}$

① $\dfrac{u^2+4uv^2-2v}{(u+2v^2)^2}$

② $\dfrac{u^2+4uv^2-2v}{(u+2v^2)^2}$

③ $-\dfrac{2(u^2+uv^2-2v)}{(u^2+2v)^2}$

④ $\dfrac{u^2+4uv^2-v}{(u+2v^2)^2}$

⑤ $-\dfrac{u^2+4uv^2-2v}{(u^2+2v)^2}$

⑥ $-\dfrac{2(u^2+2uv^2-2v)}{(u^2+2v)^2}$

合成関数の微分法から

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= -\frac{(u+2v^2)\cdot 2u}{(u^2+2v)^2} + \frac{1}{u^2+2v}\cdot 1 \\ &= -\frac{2u^2+4uv^2-(u^2+2v)}{(u^2+2v)^2} \\ &= -\frac{u^2+4uv^2-2v}{(u^2+2v)^2}\end{aligned}$$

【答】 ⑤

問題 008（バリエーション No.20）

全微分可能な関数 $z = xy$ において,

$$x = e^{3u} + e^{v}, \quad y = e^{2u} + e^{-2v}$$

のとき, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ.
解答は次の選択肢から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

0 $2e^{2u-2v}(e^{v}-1)(e^{v}+1)(e^{2v}+1)$
1 $e^{u-v}(-e^{u}+e^{v})(e^{u}+e^{v})$
2 $e^{-v}(2e^{2u+3v}-e^{2u}+e^{2v})$
3 $e^{-2v}(-2e^{3u}+e^{2u+3v}-e^{v})$
4 $e^{-2v}(2e^{2u+3v}-2e^{2u}-e^{v})$
5 $e^{-2v}(-2e^{3u}+e^{u+3v}-e^{v})$
6 $e^{-v}(-e^{2u}+2e^{u+3v}+e^{2v})$

合成関数の微分法から

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\
&= (e^{2u} + e^{-2v}) \cdot e^{v} + (e^{3u} + e^{v}) \cdot (-2e^{-2v}) \\
&= e^{2u+v} + e^{-v} - 2e^{3u-2v} - 2e^{-v} \\
&= -2e^{3u-2v} + e^{2u+v} - e^{-v} \\
&= e^{-2v}(-2e^{3u} + e^{2u+3v} - e^{v})
\end{aligned}$$

【答】 3