［コース ID：53］　微分積分 III

53.7　マクローリン展開

53.7.1　マクローリン展開

問題 001（バリエーション No.2）

関数 $y = e^{2x}$ をマクローリン展開したときの, x^4 の係数は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である.

関数 $y = f(x)$ が $x = 0$ の近傍で何回も微分可能な時, $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

で与えられる.
$f(x) = e^{2x}$ とすると $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$ より x^4 の係数は

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{2^4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{2}{3}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

問題 002（バリエーション No.35）

関数 $y = \dfrac{1}{4(x+4)}$ をマクローリン展開したときの, x^4 の係数は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウエオ}}}$ である.

$f(x) = \dfrac{1}{4}(x+4)^{-1}$ とすると

$$f'(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-2},\ f''(x) = \frac{2}{4}(x+4)^{-3},\ f^{(3)}(x) = -\frac{3!}{4}(x+4)^{-4}$$

となるので

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{4}(x+4)^{-(n+1)}$$

である. よって x^4 の係数は

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{1}{4!} \times (-1)^4 \cdot \frac{4!}{4} \cdot 4^{-5} = \frac{1}{4^6} = \frac{1}{4096}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4096}}$

問題 003（バリエーション No.1）

関数 $y = \cos 2x$ をマクローリン展開したときの, x^4 の係数は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である.

$f(x)=\cos 2x$ とおくと

$$f'(x)=-2\sin 2x,\ f''(x)=-4\cos 2x,\ f^{(3)}(x)=8\sin 2x$$

より，$f^{(4)}(x)=16\cos 2x$ となる．よって　x^4 の係数は

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=\frac{16}{4\times 3\times 2\times 1}=\frac{2}{3}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

問題 003（バリエーション No.8）

関数 $y=\dfrac{1}{1+\sin 2x}$ をマクローリン展開したときの，x^4 の係数は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である．

$f(x)=\dfrac{1}{1+\sin 2x}$ とすると

$$f'(x)=-2\cos 2x(1+\sin 2x)^{-2}=-2\cos 2x\{f(x)\}^2$$

ライプニッツの公式から

$$\begin{aligned}f^{(4)}(x)=&\ {}_3\mathrm{C}_0(-2\cos 2x)'''\{f(x)\}^2+\ {}_3\mathrm{C}_1(-2\cos 2x)''\left(\{f(x)\}^2\right)'\\&+{}_3\mathrm{C}_2(-2\cos 2x)'\left(\{f(x)\}^2\right)''+\ {}_3\mathrm{C}_3(-2\cos 2x)\left(\{f(x)\}^2\right)'''\end{aligned}$$

ここで

$$(-2\cos 2x)'=4\sin 2x,\quad (-2\cos 2x)''=8\cos 2x,\quad (-2\cos 2x)'''=-16\sin 2x$$

であり，また

$$\left(\{f(x)\}^2\right)'=2f(x)f'(x)=-4\cos 2x\{f(x)\}^3$$

$$\begin{aligned}\left(\{f(x)\}^2\right)''&=8\sin 2x\{f(x)\}^3-12\cos 2x\{f(x)\}^2f'(x)\\&=8\sin 2x\{f(x)\}^3+24\cos^2 2x\{f(x)\}^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\{f(x)\}^2\right)'''=&\ 16\cos 2x+24\sin 2x\{f(x)\}^2f'(x)\\&-96\sin 2x\cos 2x\{f(x)\}^4+96\cos^2 2x\{f(x)\}^3f'(x)\end{aligned}$$

$f(0)=1,\ f'(0)=-2$ であるから

$$\begin{aligned}f^{(4)}(0)=&\ {}_3\mathrm{C}_1\cdot 8\cdot(-4)+\ {}_3\mathrm{C}_3\cdot(-2)\cdot(16+96\cdot(-2))\\=&-96+352=256\end{aligned}$$

よって x^4 の係数は

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=\frac{256}{4\times 3\times 2\times 1}=\frac{32}{3}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{32}{3}}$

問題 004（バリエーション No.3）

関数 $y = e^{2x}\cos x$ をマクローリン展開したときの, x^5 の係数は $\dfrac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である.

$f(x) = e^{2x}\cos x$ とし, $g(x) = e^{2x},\ h(x) = \cos x$ とすると, ライプニッツの公式から

$$f^{(5)}(x) = \sum_{k=0}^{5} {}_5\mathrm{C}_k g^{(k)}(x)h^{(5-k)}(x)$$

$g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$ であり,

$$h'(x) = -\sin x,\ h''(x) = -\cos x,\quad h^{(3)}(x) = \sin x,\ h^{(4)}(x) = \cos x,\ h^{(5)}(x) = -\sin x$$

となるので, $n-k$ が奇数のとき, $h^{(n-k)}(0) = 0$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} f^{(5)}(0) &= {}_5\mathrm{C}_1 \cdot 2 + {}_5\mathrm{C}_3 \cdot 2^3 \cdot (-1) + {}_5\mathrm{C}_5 \cdot 2^5 \\ &= 10 - 80 + 32 = -38 \end{aligned}$$

よって x^5 の係数は

$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!} = -\frac{38}{5\times4\times3\times2\times1} = -\frac{19}{60}$$

【答】 $\dfrac{\mathbf{-19}}{\mathbf{60}}$

問題 004（バリエーション No.32）

関数 $y = \dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$ をマクローリン展開したときの, x^2 の係数は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエオカ}}}$ である.

$f(x) = \dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$ とすると

$$f(x) = \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$$

$g(x) = (x+3)^{-1},\quad h(x) = (x+4)^{-1}$ とすると

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot (x+3)^{-(n+1)}$$

$$h^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot (x+4)^{-(n+1)}$$

より,

$$f''(0) = g''(0) - h''(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3}\right) = \frac{4^3-3^3}{3456} = \frac{37}{3456}$$

よって x^2 の係数は

$$\frac{f''(0)}{2!} = \frac{37}{1728}$$

【答】 $\dfrac{\mathbf{37}}{\mathbf{1728}}$

問題 004（バリエーション No.38）

関数 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ をマクローリン展開したときの, x^6 の係数は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウエ}}}$ である.

$f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ とすると

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x)$$

より $f^{(6)}(x) = f(x)$ であることが分かる. よって x^6 の係数は

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = \frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{720}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{1}{720}}$

53.7.2　オイラーの公式

問題 001（バリエーション No.1）

次の計算をせよ (i は虚数単位とする). 解答は後の選択肢から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3$$

選択肢：

⓪ 0
① 1
② -1
③ i
④ $-i$

オイラーの公式から

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

であるので

$$\begin{aligned}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3 &= \left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^3 \\ &= e^{\frac{\pi}{2}i} \\ &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i\end{aligned}$$

【答】 ③

問題 002（バリエーション No.44）

$\left(\cos\dfrac{\pi}{16} + i\sin\dfrac{\pi}{16}\right)^{44} = \dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}} + \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}i$ である.
(ただし, i は虚数単位とする)

オイラーの公式を用いて

$$\begin{aligned}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)^{44} &= \left(e^{\frac{\pi}{16}i}\right)^{44}\\ &= e^{\frac{11}{4}\pi i}\\ &= \cos\frac{11}{4}\pi + i\sin\frac{11}{4}\pi\\ &= \cos\left(2\pi+\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{3}{4}\pi\right)\\ &= \cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{-\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i}$

問題 003（バリエーション No.1）

$(1+i)^8 = \boxed{\text{アイ}}$ である．
(ただし, i は虚数単位とする)

オイラーの公式から

$$e^{\frac{\pi}{4}i}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

よって $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ である．

$$\begin{aligned}(1+i)^8 &= \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^8\\ &= \sqrt{2}^8e^{2\pi i}\\ &= 2^4(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=16\end{aligned}$$

【答】　16

問題 004（バリエーション No.4）

複素数 z が $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ を満たすとき,

$z=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}\pm\sqrt{\boxed{\text{イ}}}\,i}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり,

$z^{20}+\dfrac{1}{z^{20}}=\boxed{\text{エオ}}$ である．

両辺を 2 乗すると

$$z^2+2+\frac{1}{z^2}=2$$

より $z^2+\dfrac{1}{z^2}=0$ である．両辺に z^2 をかけて整理すれば $z^4=-1$ なので $|z|=1$ である．
$z=e^{ix}=\cos x+i\sin x$ とおくと, $\dfrac{1}{z}=e^{-ix}=\cos x-i\sin x$ となるので

$$z+\frac{1}{z}=2\cos x=\sqrt{2}$$

$\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より $x = \pm\dfrac{\pi}{4}$ となる．よって

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

また, $z^{20} = \left(e^{\pm\frac{\pi}{4}i}\right)^{20} = e^{\pm 5\pi \imath} = -1$ より

$$z^{20} + \frac{1}{z^{20}} = -1 - 1 = -2$$

【答】　$\boldsymbol{z = \dfrac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2},\ z^{20} + \dfrac{1}{z^{20}} = -2}$