［コース ID：53］　微分積分 III

53.8　2 変数関数, 偏導関数

53.8.1　偏導関数

問題 001（バリエーション No.2）

次の 2 変数関数の極限を調べ, 極限が存在する場合は ①を, 存在しない場合は⓪を空欄 $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$$

平面上の点 (x, y) を極座標形式で表すと

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

与えられた関数に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} &= \frac{r^3\cos^3\theta - r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin\theta} \\ &= r(\cos^3\theta - \sin^3\theta)\end{aligned}$$

ここで, $|\cos\theta|$, $|\sin\theta| \leqq 1$ より, $\left|\cos^3\theta - \sin^3\theta\right| \leqq \left|\cos^3\theta\right| + \left|\sin^3\theta\right| = 2$ であるので

$$0 \leqq \left|r\cos^3\theta - r\sin^3\theta\right| \leqq 2r$$

$(x, y) \to (0, 0)$ のとき, $r \to 0$ であり $\displaystyle\lim_{r\to 0} 2r = 0$ である. よって, はさみうちの原理から

$$\lim_{r\to 0}\left|r(\cos^3\theta - \sin^3\theta)\right| = 0$$

以上から

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta - \sin^3\theta) = 0$$

となるので, 極限は存在し, その極限値は 0 である.

(注意 1)
$\left|\cos^3\theta - \sin^3\theta\right| \leqq 2$ と評価しているが $\cos^3\theta - \sin^3\theta$ の最大値は 2 ではない.
しかし今は極限が 0 に向かうことだけを示したいので大雑把に上から定数で値を抑えられたらそれで十分である.
(注意 2)
一般に, $y = f(x)$ の $x = a$ における極限値を考えるとき, その絶対値 $|f(x)|$ が 0 に収束するならば本来の値 $f(x)$ も 0 に収束する.

【答】　①

問題 001（バリエーション No.4）

次の 2 変数関数の極限を調べ, 極限が存在する場合は ①を, 存在しない場合は⓪を空欄 $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

2 変数関数の極限値を考えるときは ”どんな近づき方をしても”収束しなければならない事に注意する.

$y=0$ に沿って近づけると

$$\lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2+0} = 0$$

また, $y=x$ に沿って近づけると

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

近づけ方で極限値が異なるので, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2+y^2}$ は存在しない.

【答】 ⓪

問題 001（バリエーション No.13）

次の 2 変数関数の極限を調べ, 極限が存在する場合は ①を, 存在しない場合は⓪を空欄 $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

与えられた関数に $y=0$ を代入すると

$$\frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}$$

$x<0$ のとき $\dfrac{x}{|x|} = -1$ であり, $x>0$ のとき $\dfrac{x}{|x|} = 1$ である. x を正の方向から 0 に近づけるときと負の方向から 0 に近づけるときで極限値が変わるので, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は存在しない.

【答】 ⓪

問題 002（バリエーション No.1）

次の 2 変数関数の極限を調べ, 極限が存在する場合は ①を, 存在しない場合は⓪を空欄 $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+2xy}{x^2+y^2}$$

与えられた関数において $y=x$ とすると, $(x,y)\to(0,0)$ のとき $x\to 0$ であるから

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+2x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 1$$

また $y=-x$ とすると同様に $(x,y)\to(0,0)$ のとき $x\to 0$ であるから

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(-x)+2x(-x)}{x^2+(-x)^2} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^3+2x^2}{2x^2} = -\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}+1\right) = -1$$

原点への近づけ方で極限値が異なるので $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+2xy}{x^2+y^2}$ は存在しない.

【答】 0

問題 002（バリエーション No.8）

次の 2 変数関数の極限を調べ, 極限が存在する場合は 1 を, 存在しない場合は 0 を空欄 $\boxed{ア}$ へマークせよ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^2+y^3}{x^2+y^2}$$

m を実数とし, $x=my$ とすると, $(x,y)\to(0,0)$ は $y\to 0$ と表せる.

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0} \frac{2y^2+y^3}{m^2y^2+y^2} &= \lim_{y\to 0} \frac{2+y}{m^2+1} \\ &= \frac{2}{m^2+1}\end{aligned}$$

m の値によって極限値が変わるので $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^2+y^3}{x^2+y^2}$ は存在しない.

【答】 0

問題 003（バリエーション No.1）

次の 2 変数関数の極限を求めよ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+y-3}{x^2+y^2+5} = \frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+y-3}{x^2+y^2+5} = \frac{0+0-3}{0+0+5} = -\frac{3}{5}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{-3}{5}}$

問題 003（バリエーション No.2）

次の 2 変数関数の極限を求めよ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \boxed{ア}$$

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とすると $(x,y)\to(0,0)$ のとき $r\to 0$ であり,

$$\frac{\sin(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta} = \frac{\sin r^2}{r^2}$$

$r\to 0$ のとき $r^2\to 0$ であり $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ であるから $\displaystyle\lim_{r\to 0}\frac{\sin r^2}{r^2}=1$ である. よって

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{\sin r^2}{r^2} = 1$$

【答】　1

問題 003（バリエーション No.3）

次の 2 変数関数の極限を求めよ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y^2} = \boxed{\text{ア}}$$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とすると

$$\frac{\sin\left(r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\right)}{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)} = \frac{\sin(r^2\cos 2\theta)}{r^2\cos 2\theta}$$

$t = r^2\cos 2\theta$ とすると $(x,y)\to(0,0)$ のとき $r\to 0$ であるから, このとき $t\to 0$ である．よって

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{\sin(r^2\cos 2\theta)}{r^2\cos 2\theta} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

【答】　1

問題 003（バリエーション No.4）

次の 2 変数関数の極限を求めよ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2-y^2)}{x+y} = \boxed{\text{ア}}$$

$y = mx$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x^2-m^2x^2)}{x+mx} &= \frac{\sin\left((1-m^2)x^2\right)}{(1+m)x}\\ &= \frac{\sin\left((1-m^2)x^2\right)}{(1-m^2)x^2}\cdot(1-m)x\end{aligned}$$

m を固定すると $(x,y)\to(0,0)$ のとき , $(1-m^2)x^2\to 0$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left((1-m^2)x^2\right)}{(1-m^2)x^2} = 1$$

より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left((1-m^2)x^2\right)}{(1-m^2)x^2}\cdot(1-m)x = 0$ である．また, $x=0$ を与えられた関数に代入すると

$$\frac{\sin(0-y^2)}{0+y} = -\frac{\sin y^2}{y}$$

$t = y^2$ とすると $y\to\pm 0$ のとき $t\to\pm 0$ であるから

$$\lim_{y\to\pm 0}\left(-\frac{\sin y^2}{y}\right) = -\lim_{t\to\pm 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\left(\pm\sqrt{t}\right)1\cdot 0 = 0$$

いずれも極限値は 0 に収束するので $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2-y^2)}{x+y} = 0$ である.

【答】　0

問題 004（バリエーション No.1）

次の 2 変数関数の極限を求めよ.

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2-3xy+2}{x^2+y^2} = \boxed{\text{ア}}$$

与えられた関数は $(x,y)=(1,0)$ の近傍で連続であるから

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2-3xy+2}{x^2+y^2} = \frac{1-0+2}{1+0} = 3$$

【答】

問題 004（バリエーション No.4）

次の 2 変数関数の極限を求めよ.

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{(x-2)^3(y-3)^3}{(x-2)^2+(y-3)^2} = \boxed{\text{ア}}$$

$x=2+r\cos\theta,\ y=3+r\sin\theta$ とすると $(x,y)\to(2,3)$ のとき $r\to 0$ である.

$$\frac{(x-2)^3(y-3)^3}{(x-2)^2+(y-3)^2} = \frac{r^6\cos^3\theta\sin^3\theta}{r^2} = r^4\cos^3\theta\sin^3\theta$$

$0 \leqq \left|r^4\cos^3\theta\sin^3\theta\right| \leqq r^4$ であり, $\displaystyle\lim_{r\to 0} r^4 = 0$ であるからはさみうちの原理より

$$\lim_{r\to 0}\left|r^4\cos^3\theta\sin^3\theta\right| = 0$$

よって

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{(x-2)^3(y-3)^3}{(x-2)^2+(y-3)^2} = \lim_{r\to 0} r^4\cos^3\theta\sin^3\theta = 0$$

【答】　0

53.8.2　偏導関数

問題 001（バリエーション No.1）

2 変数関数 $z(x,y)=3x^7+7xy+11y^8$ において, 偏微分 z_x を表す式として正しいものを以下の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

0 $7x+88y^7$
1 $21x^6+7y$
2 $72x^8-6y$
3 $-6x+20y^9$
4 $18x^8+3y$
5 $-2x+36y^5$
6 $18x^5+4y$
7 $3x-\dfrac{72}{y^{10}}$

x で偏微分するときは y は定数として扱って微分するので

$$z_x = 21x^6 + 7y$$

となる.

【答】 ①

問題 002（バリエーション No.20）

2 変数関数 $z(x, y) = \dfrac{4y^9 + 8x^3}{2xy}$ において, 偏微分 z_y を表す式として正しいものを以下の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

⓪ $\dfrac{8x^3 - 11y^2}{11x^2 y}$

① $\dfrac{11y^3 - 4x^2}{11xy^2}$

② $\dfrac{4(4y^9 - x^3)}{xy^2}$

③ $\dfrac{2(4x^3 - y^9)}{x^2 y}$

④ $\dfrac{3(10x^7 - 3y^9)}{10x^2 y}$

⑤ $\dfrac{72y^9 - 5x^7}{10xy^2}$

⑥ $\dfrac{3(8x^5 - 3y^7)}{2x^2 y}$

⑦ $\dfrac{3(9y^7 - x^5)}{xy^2}$

y で偏微分するときは x は定数として扱って微分するので

$$z_y = \frac{36y^8 \cdot 2xy - (4y^9 + 8x^3) \cdot 2x}{4x^2 y^2} = \frac{64xy^9 - 16x^4}{4x^2 y^2} = \frac{4(4y^9 - x^3)}{xy^2}$$

【答】 ②

問題 003（バリエーション No.1）

2 変数関数 $z(x,y)=\dfrac{3x+4y}{5x+6y}$ において, 偏微分 z_x を表す式として正しいものを以下の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

⓪ $-\dfrac{2y}{(5x+6y)^2}$

① $\dfrac{2x}{(5x+6y)^2}$

② $-\dfrac{y}{3(x+y)^2}$

③ $\dfrac{x}{3(x+y)^2}$

④ $\dfrac{4y}{(3x+5y)^2}$

⑤ $-\dfrac{4x}{(3x+5y)^2}$

⑥ $-\dfrac{6y}{(3x+2y)^2}$

⑦ $\dfrac{6x}{(3x+2y)^2}$

$3x+4y=\dfrac{3}{5}(5x+6y)+\dfrac{2}{5}y$ より

$$\begin{aligned} z(x,y) &= \frac{\frac{3}{5}(5x+6y)+\frac{2}{5}y}{5x+6y} \\ &= \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{y}{5x+6y} \end{aligned}$$

よって

$$z_x=\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{5y}{(5x+6y)^2}\right)=-\frac{2y}{(5x+6y)^2}$$

【答】　⓪

問題 004（バリエーション No.20）

2 変数関数 $z(x,y)=\sqrt{5xy^4+3x^4y}$ において, 偏微分 z_y を表す式として正しいものを以下の中から選び, その番号を ア へマークせよ.

⓪ $-\dfrac{2y}{(5x+6y)^2}$
① $\dfrac{2x}{(5x+6y)^2}$
② $-\dfrac{y}{3(x+y)^2}$
③ $\dfrac{x}{3(x+y)^2}$
④ $\dfrac{4y}{(3x+5y)^2}$
⑤ $-\dfrac{4x}{(3x+5y)^2}$
⑥ $-\dfrac{6y}{(3x+2y)^2}$
⑦ $\dfrac{6x}{(3x+2y)^2}$

x を定数として扱って y で微分すればいいから

$$z_y=\frac{1}{2}\cdot\frac{20xy^3+3x^4}{\sqrt{5xy^4+3x^4y}}=\frac{x(20y^3+3x^3)}{2\sqrt{xy(5y^3+3x^3)}}$$

【答】 ⑤

問題 005（バリエーション No.3）

2 変数関数 $z(x,y)=e^{-4x}\sin(3y)$ において, 偏微分 z_x を表す式として正しいものを以下の中から選び, その番号を ア へマークせよ.

⓪ $4e^{-4x}\sin(3y)$
① $-3e^{-4x}\cos(3y)$
② $-4e^{-4x}\sin(3y)$
③ $3e^{-4x}\cos(3y)$
④ $-4e^{4x}\sin(3y)$
⑤ $3e^{4x}\cos(3y)$
⑥ $4e^{4x}\sin(3y)$
⑦ $-3e^{4x}\cos(3y)$

y を定数として扱って x で微分すればよいので

$$z_x=-4e^{-4x}\sin(3y)$$

【答】 ②

問題 006（バリエーション No.20）

2 変数関数 $z(x,y) = (3x+2y)\log(2x+5y)$ において, 偏微分 z_y を表す式として正しいものを以下の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

⓪ $5\log(2x+y) + \dfrac{2(5x+3y)}{2x+y}$

① $2\log(2x+5y) + \dfrac{5(3x+2y)}{2x+5y}$

② $4\log(3x+4y) + \dfrac{16(x+y)}{3x+4y}$

③ $3\log(x+y) + \dfrac{x+3y}{x+y}$

④ $5\log(4x+y) + \dfrac{4(5x+y)}{4x+y}$

⑤ $3\log(2x+5y) + \dfrac{2(3x+2y)}{2x+5y}$

⑥ $2\log(x+2y) + \dfrac{2x+5y}{x+2y}$

⑦ $3\log(2x+5y) + \dfrac{2(3x+5y)}{2x+5y}$

z を y で偏微分すると

$$z_y = 2\log(2x+5y) + \frac{(3x+2y)\cdot 5}{2x+5y} = 2\log(2x+5y) + \frac{5(3x+2y)}{2x+5y}$$

【答】 ①

問題 007（バリエーション No.1）

2 変数関数

$$f(x,y) = 2x^2 + 5xy + 3y^6$$

の $(1,\ 0)$ における偏微分係数は, それぞれ

$$f_x = \boxed{\text{ア}}\ ,\quad f_y = \boxed{\text{イ}}$$

である.

$f(x,y)$ をそれぞれ x と y で偏微分すると

$$f_x(x,y) = 4x + 5y$$

$$f_y(x,y) = 5x + 18y^5$$

よって $(1,\ 0)$ における偏微分係数は

$$f_x(1,\ 0) = 4\cdot 1 + 5\cdot 0 = 4$$

$$f_y(1,\ 0) = 5\cdot 1 + 18\cdot 0 = 5$$

【答】 $\boldsymbol{f_x(1,0) = 4,\ \ f_y(1,0) = 5}$

問題 008（バリエーション No.40）

2 変数関数
$$f(x,y)=\sqrt{5x^4y^5+4xy^3}$$
の (1, 1) における偏微分係数は, それぞれ
$$f_x = \boxed{\text{ア}}\ ,\quad f_y=\frac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$
である.

x と y で偏微分すると
$$f_x(x,y)=\frac{10x^3y^4+2y^3}{\sqrt{5x^4y^5+4xy^3}}$$
$$f_y(x,y)=\frac{25x^4y^4+12xy^2}{2\sqrt{5x^4y^5+4xy^3}}$$
よって (1,1) における偏微分係数は
$$f_x(1,1)=\frac{10+2}{\sqrt{5+4}}=\frac{12}{3}=4$$
$$f_y(1,1)=\frac{25+12}{2\sqrt{5+4}}=\frac{37}{6}$$

【答】 $\boldsymbol{f_x(1,1)=4,\ \ f_y(1,1)=\frac{37}{6}}$

問題 009（バリエーション No.29）

関数
$$f(x,y,z)=3x^2+3y^2+z^2+3yz+2zx+2xy$$
の (1, 1, 1) における偏微分係数は, それぞれ
$$f_x=\boxed{\text{アイ}}\ ,\quad f_y=\boxed{\text{ウエ}}\ ,\ f_z=\boxed{\text{オ}}$$
である.

各変数で偏微分すると
$$f_x(x,y)=6x+2z+2y$$
$$f_y(x,y)=6y+3z+2x$$
$$f_z(x,y)=2z+3y+2x$$
よって (1, 1, 1) における偏微分係数は
$$f_x(1,1,1)=6+2+2=10$$
$$f_y(1,1,1)=6+3+2=11$$
$$f_z(1,1,1)=2+3+2=7$$

【答】 $\boldsymbol{f_x(1,1,1)=10,\ f_y(1,1,1)=11,\ f_z(1,1,1)=7}$