［コース ID：53］　微分積分 III

53.9　全微分

53.9.1　全微分

問題 001（バリエーション No.60）

全微分可能な関数

$$z = f(x, y) = 2x^8y^8 - 5x^8y^7$$

の点 $(-1,\ 1,\ -3)$ における z の全微分は

$$dz = \boxed{\text{アイ}}\,dx - \boxed{\text{ウエ}}\,dy$$

である.

偏導関数を求めると

$$f_x(x, y) = 16x^7y^8 - 40x^7y^7$$

$$f_y(x, y) = 16x^8y^7 - 35x^8y^6$$

となるので $(-1, 1)$ における偏微分係数は

$$f_x(-1, 1) = -16 + 40 = 24$$

$$f_y(-1, 1) = 16 - 35 = -19$$

よって $f(x, y)$ の, 点 $(-1, 1, -3)$ における全微分は

$$dz = f_x dx + f_y dy = 24\,dx - 19\,dy$$

【答】　$\boldsymbol{dz = 24\,dx - 19\,dy}$

問題 002（バリエーション No.10）

全微分可能な関数

$$z = f(x, y) = \frac{6x^6 + 10y^4}{6xy}$$

の点 $(-1,\ 1,\ -\dfrac{8}{3})$ における z の全微分は

$$dz = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}dx - \boxed{\text{エ}}\,dy$$

である.

偏導関数を求めると

$$f_x(x, y) = \frac{36x^5 \cdot 6xy - (6x^6 + 10y^4) \cdot 6y}{36x^2y^2} = \frac{180x^6 - 60y^4}{36x^2y}$$

$$f_y(x, y) = \frac{40y^3 \cdot 6xy - (6x^6 + 10y^4) \cdot 6x}{36x^2y^2} = \frac{180y^4 - 36x^6y}{36xy^2}$$

となるので $(-1,1)$ における偏微分係数は

$$f_x(-1,1) = \frac{180-60}{36} = \frac{10}{3}$$

$$f_y(-1,1) = -\frac{180-36}{36} = -4$$

よって $f(x,y)$ の, 点 $(-1,1,-\frac{8}{3})$ における全微分は

$$dz = f_x dx + f_y dy = \frac{10}{3}\,dx - 4\,dy$$

【答】 $\boldsymbol{dz = \frac{10}{3}\,dx - 4\,dy}$

問題 003（バリエーション No.1）

全微分可能な関数

$$z = f(x,y) = e^{-2x}\tan 4y$$

の点 $(0,\ \frac{\pi}{3},\ \sqrt{3})$ における z の全微分は

$$dz = \boxed{\text{アイ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\,dx + \boxed{\text{エオ}}\,dy$$

である.

偏導関数を求めると

$$f_x(x,y) = -2e^{-2x}\tan 4y$$

$$f_y(x,y) = \frac{4e^{-2x}}{\cos^2 4y}$$

となるので $\left(0,\ \frac{\pi}{3}\right)$ における偏微分係数は

$$f_x(0,\ \frac{\pi}{3}) = -2\cdot 1\cdot\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

$$f_y(0,\ \frac{\pi}{3}) = \frac{4\cdot 1}{\frac{1}{4}} = 16$$

よって $f(x,y)$ の, 点 $(0,\ \frac{\pi}{3},\ \sqrt{3})$ における全微分は

$$dz = f_x dx + f_y dy = -2\sqrt{3}\,dx + 16\,dy$$

【答】 $\boldsymbol{dz = -2\sqrt{3}\,dx + 16\,dy}$

問題 004（バリエーション No.2）

全微分可能な関数

$$z = f(x,y) = 2x^3 + 5xy + 9y^6$$

について, 点 $(1,\ 1,\ 16)$ における $z = f(x,y)$ の接平面の方程式は

$$\boxed{\text{アイ}}\,x + \boxed{\text{ウエ}}\,y - z = \boxed{\text{オカ}}$$

である.

全微分可能な関数 $z = f(x, y)$ の, 点 $(a,\ b,\ c)$ における接平面の方程式は

$$(z - c) = f_x(a,\ b)(x - a) + f_y(a,\ b)(y - b)$$

で与えられる. 与えられた関数を偏微分すると

$$f_x(x,\ y) = 6x^2 + 5y, \quad f_y(x,\ y) = 5x + 54y^5$$

なので $(1,\ 1)$ における偏微分係数は

$$f_x(1,\ 1) = 6 + 5 = 11$$

$$f_y(1,\ 1) = 5 + 54 = 59$$

よってこの点における接平面の方程式は

$$z - 16 = 11(x - 1) + 59(y - 1)$$

これを整理すると

$$11x + 59y - z = 54$$

【答】 $\boldsymbol{11x + 59y - z = 54}$