［コース ID：53］　微分積分 III

53.1　媒介変数表示による図形

53.1.1　面積

問題 001（バリエーション No.7）

媒介変数 t によって

$$x = t^3$$
$$y = t(2-t)$$

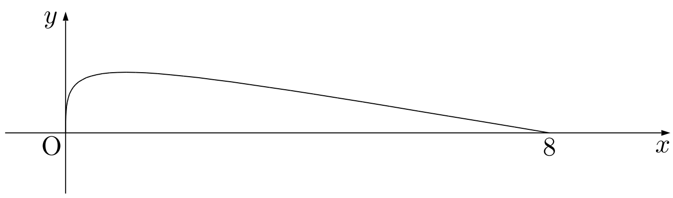
と表される曲線と, x 軸で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である.

x は単調増加であることに注意する. x 軸で囲まれた部分を考えるので, $y=0$ のときを考えると $y=0$ のとき $t=0,2$ である. よって求める面積は

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left| y\frac{dx}{dt} \right| dt &= \int_0^2 t(2-t)\cdot 3t^2\,dt \\ &= \int_0^2 (6t^3-3t^4)\,dt \\ &= \left[\frac{3}{2}t^4 - \frac{3}{5}t^5\right]_0^2 = 24 - \frac{96}{5} = \frac{24}{5}\end{aligned}$$

【答】　$\mathbf{\dfrac{24}{5}}$

実際の曲線は以下の通り.



問題 001（バリエーション No.12）

媒介変数 t によって

$$x = t^2$$
$$y = 4t - t^3 \ (t \geqq 0)$$

と表される曲線と, x 軸で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である.

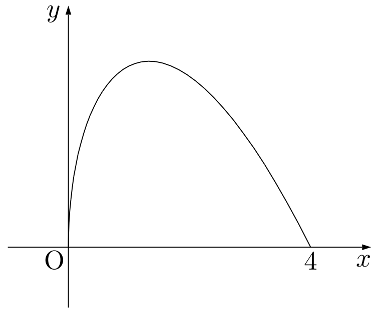
$t \geqq 0$ のとき, x は単調増加である. x 軸と囲まれた部分を考えるので $y=0$ のときを考えると,

$y = 4t - t^3 = t(2+t)(2-t)$ かつ $t \geqq 0$ より, $y = 0$ のとき $t = 0, 2$ である．よって求める面積は

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left| y\frac{dx}{dt} \right| dt &= \int_0^2 (4t - t^3) \cdot 2t\,dt \\ &= \int_0^2 \left(8t^2 - 2t^4\right) dt \\ &= \left[\frac{8}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5\right]_0^2 \\ &= \frac{64}{3} - \frac{64}{5} = \frac{128}{15}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{128}{15}}$

実際の曲線は下の通り.



問題 001（バリエーション No.33）

媒介変数 t によって

$$\begin{aligned}x &= t^2 - 1 \\ y &= -(t-5)(t+4)\end{aligned}$$

と表される曲線と, x 軸で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である.

$x,\ y$ がともに t の関数であることを明確にするため, $x,\ y$ をそれぞれ $x(t),\ y(t)$ と表す.
x 軸で囲まれた部分を考えるので $y = 0$ のときを考えると, $y(t) = 0$ のとき $t = -4, 5$ である.

$-4 \leqq t \leqq 5$ の範囲での x の動きを考えると $x(t) = t^2 - 1$ より x は $-4 \leqq t \leqq 0$ の範囲で単調減少であり, $0 \leqq x \leqq 5$ で単調増加である．特に, $0 \leqq t \leqq 4$ のとき $x(t) = x(-t)$ である.

また, $y = -(t^2 - t - 20) = -t^2 + t + 20$ であるから $0 \leqq t \leqq 4$ である t において

$$y(t) - y(-t) = (-t^2 + t + 20) - ((-t)^2 + (-t) + 20) = 2t \geqq 0$$

まとめると, $0 \leqq t \leqq 4$ である t に対しては $x(t) = x(-t)$ であるが, このとき $y(t) \geqq y(-t)$ となっている.
$-4 \leqq t \leqq 5$ において, $y \geqq 0$ であり,

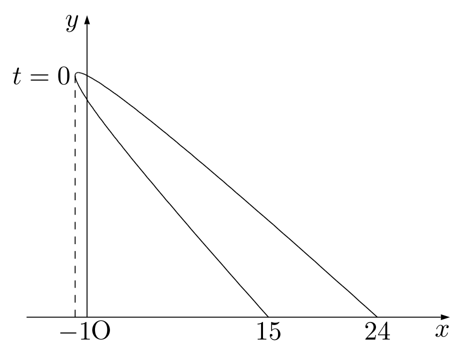
$$\left|\frac{dx}{dt}\right| = \begin{cases} 2t & (0 \leqq t \leqq 5) \\ -2t & (-4 \leqq t \leqq 0) \end{cases}$$

であるから x 軸で囲まれた部分の面積は

$$
\begin{aligned}
-\int_{-4}^{0}\left|y\frac{dx}{dt}\right|\,dt+\int_{0}^{5}\left|y\frac{dx}{dt}\right|\,dt &= -\int_{-4}^{0}-(t^2-t-20)(-2t)\,dt+\int_{0}^{5}-(t^2-t-20)\cdot 2t\,dt \\
&= \int_{-4}^{5}-(t^2-t-20)\cdot 2t\,dt \\
&= \int_{-4}^{5}\left(-2t^3+2t^2+40t\right)\,dt \\
&= \left[-\frac{1}{2}t^4+\frac{2}{3}t^3+20t^2\right]_{-4}^{5} \\
&= -\frac{1}{2}\left(5^4-(-4)^4\right)+\frac{2}{3}\left(5^3-(-4)^3\right)+20\left(5^3-(-4)^2\right) \\
&= -\frac{369}{2}+126+180=\frac{243}{2}
\end{aligned}
$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{243}{2}}$

実際の曲線は下の通り.



問題 002（バリエーション No.1）

媒介変数 t によって

$$
\begin{aligned}
x &= 3\cos t \\
y &= \sin t
\end{aligned}
$$

$$(0 \leqq t \leqq \pi)$$

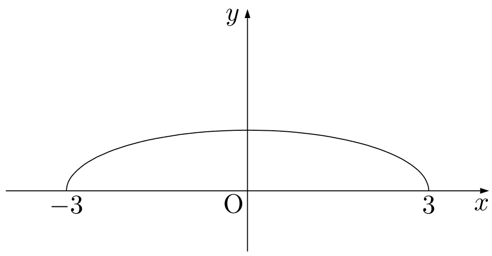
と表される曲線と, x 軸で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$ である.

x 軸で囲まれた部分を考えるので $y=0$ のときを考えると $0 \leqq t \leqq \pi$ より $y=0$ のとき $t=0,\pi$.
また, このとき x は単調減少であるから, 求める面積は

$$
\begin{aligned}
\int_{0}^{\pi}\left|y\frac{dx}{dt}\right|\,dt &= \int_{0}^{\pi}\sin t\cdot 3\sin t\,dt \\
&= \frac{3}{2}\int_{0}^{\pi}(1-\cos 2t)\,dt \\
&= \frac{3}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{0}^{\pi} \\
&= \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}
$$

【答】　$\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}$

実際の曲線は以下の通り



問題 003（バリエーション No.1）

媒介変数 t によって

$$x = t - \sin t$$
$$y = 1 - \cos t$$
$$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

と表される曲線と, x 軸で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{ア}}$ π である.

$y = 0$ とすると $\cos t = 1$ より $t = 0, 2\pi$. また

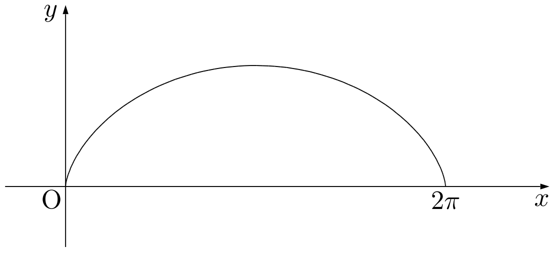
$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t \geqq 0$$

より x は単調増加である. よって求める面積は

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \left| y \frac{dx}{dt} \right| dt &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= \left[t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t \right]_0^{2\pi} = 3\pi\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{3\pi}$

実際の曲線は以下の通り



問題 004（バリエーション No.21）

媒介変数 t によって

$$x = 4\cos t$$
$$y = 6\sin 2t$$
$$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

と表される曲線で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{アイ}}$ である．

$x,\ y$ が t の関数であることを明記するため $x(t), y(t)$ と表す．

$y=0$ とすると $t=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi$ である．ここで $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ である t に対して

$$x(\pi - t) = 4\cos(\pi - t) = -4\cos t = -x(t)$$

$$y(\pi - t) = 6\sin(2\pi - 2t) = -6\sin 2t = -y(t)$$

同様にして

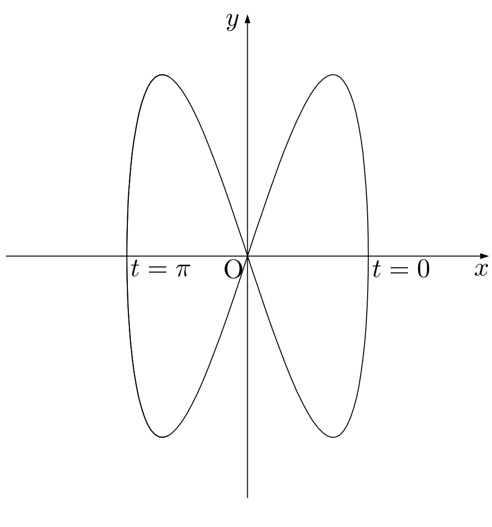
$$x(t+\pi) = -x(t),\quad y(t+\pi) = y(t)$$

$$x(2\pi - t) = x(t),\quad y(2\pi - t) = -y(t)$$

このことから次が分かる．上で定義される曲線のうち $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ が定義する部分を l_0 としたとき

- $\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ が定義する曲線は l_0 と原点に関して対称である．
- $\pi \leqq t \leqq \frac{3}{2}\pi$ が定義する曲線は l_0 と y 軸に関して対称である．
- $\frac{3}{2}\pi \leqq t \leqq 2\pi$ が定義する曲線は l_0 と x 軸に関して対称である．

実際, グラフを書くと次のようになる．



よって求める面積は $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ の部分が作る図形の面積を 4 倍したものである．この範囲において

$$\frac{dx}{dt} = -4\sin t \leqq 0 \quad (0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$$

より x は単調減少であるから, その面積は

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| y\frac{dx}{dt} \right| dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\sin 2t \cdot (4\sin t)\,dt \\ &= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t\cos t)\cdot \sin t\,dt \\ &= 48\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos t\,dt \\ &= 48\left[\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 16\end{aligned}$$

求める面積はこれを 4 倍したものであるから, $16\times 4 = 64$ である.

【答】　64

53.1.2　長さ

問題 001（バリエーション No.2）

媒介変数 t によって

$$\begin{aligned}x &= 2(t-\sin t)\\ y &= 2(1-\cos t)\end{aligned}$$

と表される曲線の, $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の部分の長さ L は
$L =$ $\boxed{\text{アイ}}$ である.

媒介変数 t によって

$$\begin{aligned}x &= f(t)\\ y &= g(t)\end{aligned}$$

と表される曲線において $\alpha \leqq t \leqq \beta$ の部分の長さ L は

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\,dt$$

で表される.

$$\frac{dx}{dt} = 2(1-\cos t),\quad \frac{dy}{dt} = 2\sin t$$

であるから

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4(1-\cos t)^2 + 4\sin^2 t}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(4-8\cos t+4\cos^2 t)+4\sin^2 t}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{8(1-\cos t)}\,dt \\ &= 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)}\,dt\end{aligned}$$

ここで. 半角の公式から $2\sin^2\dfrac{t}{2}=1-\cos t$ より

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)}\,dt &= \int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\\ &=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|\,dt\\ &=\sqrt{2}\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}\\ &=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

よって $L=2\sqrt{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)}\,dt=2\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=16$ である.

【答】　$\boldsymbol{L=16}$

問題 002（バリエーション No.44）

媒介変数 t によって

$$\begin{aligned}x&=2t^3\\ y&=t^2\end{aligned}$$

と表される曲線の, $2\leqq t\leqq 3$ の部分の長さ L は

$L=\dfrac{\boxed{\text{アイウ}}\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}-\boxed{\text{カキ}}\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である.

$$\frac{dx}{dt}=6t^2,\quad \frac{dy}{dt}=2t$$

より, 曲線の長さは

$$\begin{aligned}L&=\int_2^3\sqrt{36t^4+4t^2}\,dt\\ &=2\int_2^3 t\sqrt{9t^2+1}\,dt\\ &=2\left[\frac{1}{27}\left(9t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3\\ &=\frac{2}{27}\left(82\sqrt{82}-37\sqrt{37}\right)\\ &=\frac{164\sqrt{82}-74\sqrt{37}}{27}\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{L=\dfrac{164\sqrt{82}-74\sqrt{37}}{27}}$

問題 003（バリエーション No.1）

媒介変数 t によって

$$x = \cos^3 t$$
$$y = \sin^3 t$$

と表される曲線の, $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の部分の長さ L は
$L = \boxed{\text{ア}}$ である.

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t\cos^2 t, \quad \frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t\cos t$$

より

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t\cos^4 t + 9\sin^4 t\cos^2 t}\,dt \\ &= 3\int_0^{2\pi} |\sin t\cos t| \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt \\ &= 3\int_0^{2\pi} |\sin t\cos t|\ dt \\ &= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} |\sin 2t|\ dt \end{aligned}$$

ここで

$$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}, \quad \pi \leqq t \leqq \frac{3}{2}\pi \ \text{ のとき}, \quad \sin 2t \geqq 0$$

$$\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi, \quad \frac{3}{2}\pi \leqq t \leqq 2\pi \ \text{ のとき}, \quad \sin 2t \leqq 0$$

であるから

$$\begin{aligned} L &= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} |\sin 2t|\ dt \\ &= \frac{3}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2t\,dt + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin 2t\,dt - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin 2t\,dt\right) \\ &= \frac{3}{2}\left\{\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} - \left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\right\} \\ &= \frac{3}{2}(1 - (-1) + 1 - (-1)) = 6 \end{aligned}$$

【答】　6

問題 004（バリエーション No.1）

媒介変数 t によって

$$x = \sqrt{3}t^2$$
$$y = t - t^3$$

と表される曲線の, $0 \leqq t \leqq 1$ の部分の長さ L は
$L = \boxed{\text{ア}}$ である.

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{3}t, \quad \frac{dy}{dt} = 1 - 3t^2$$

であるから

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{12t^2 + (1-3t^2)^2}\, dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{12t^2 + (1-6t^2+9t^4)}\, dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1+6t^2+9t^4}\, dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{(1+3t^2)^2}\, dt \\ &= \int_0^1 \left|1+3t^2\right|\, dt \\ &= \left[t+t^3\right]_0^1 = 2 \end{aligned}$$

【答】　2

53.1.3　体積

問題 001（バリエーション No.1）

媒介変数 t によって

$$\begin{aligned} x &= t^2 \\ y &= 1-t \end{aligned}$$

と表される曲線と直線 $x=0$, および x 軸で囲まれた部分を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は

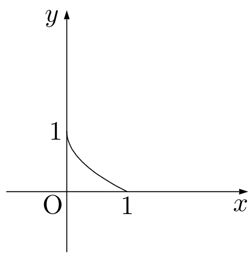
$V = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$ である.

x 軸で囲まれた部分を考えるので $y=0$ のときを考えると, $y=0$ のとき $t=1$ である. また $x=0$ のとき $t=0$ であり, $0 \leqq t \leqq 1$ で x は単調増加なので, 求める立体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi(1-t)^2 \cdot (2t)\, dt \\ &= \pi \int_0^1 (2t - 4t^2 + 2t^3)\, dt \\ &= \pi \left[t^2 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^4\right]_0^1 \\ &= \pi\left(1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\pi \end{aligned}$$

【答】　$V = \dfrac{1}{6}\pi$

実際の曲線は以下の通り



問題 001（バリエーション No.7）

媒介変数 t によって

$$x = t^2$$
$$y = t(2-t)$$

と表される曲線と x 軸で囲まれた部分を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は

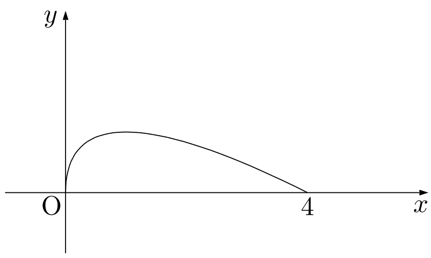
$V = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}\pi$ である.

x 軸で囲まれた部分を考えるので $y=0$ のときを考えると, $y=0$ のとき $t=0,2$ である. $0 \leqq t \leqq 2$ で x は単調増加であるから求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi t^2(2-t)^2 \cdot (2t)\,dt \\ &= 2\pi\int_0^2 (4t^3 - 4t^4 + t^5)\,dt \\ &= 2\pi\left[t^4 - \frac{4}{5}t^5 + \frac{1}{6}t^6\right]_0^2 \\ &= 2\pi\left(16 - \frac{128}{5} + \frac{32}{3}\right) = \frac{32}{15}\pi \end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{V = \dfrac{32}{15}\pi}$

実際の曲線は以下の通り



問題 001（バリエーション No.17）

媒介変数 t によって

$$x = t^2 - 1$$
$$y = -(t-3)(t-5)$$

と表される曲線と x 軸で囲まれた部分を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は

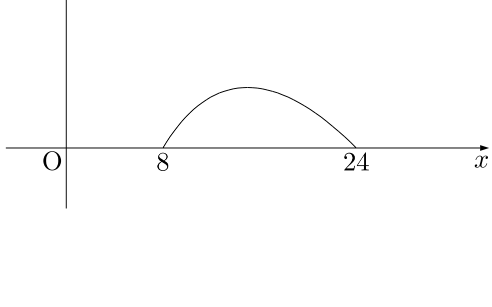
$V = \dfrac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}\pi$ である.

x 軸で囲まれた部分を考えるので $y=0$ のときを考えると, $y=0$ のとき $t=3, 5$ である. $3 \leqq t \leqq 5$ の範囲で x は単調増加であるから求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \int_3^5 \pi(t-3)^2(t-5)^2 \cdot (2t)\,dt \\
&= 2\pi \int_3^5 t(t^2-8t+15)^2\,dt \\
&= 2\pi \int_3^5 (t^5 - 16t^4 + 94t^3 - 240t^2 + 225t)\,dt \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{6}t^6 - \frac{16}{5}t^5 + \frac{47}{2}t^4 - 80t^3 + \frac{225}{2}t^2\right]_3^5 \\
&= 2\pi \cdot 5^2 \left(\frac{5^4}{6} - 16 \times 5^2 + \frac{47 \times 5^2}{2} - 80 \times 5 + \frac{225}{2}\right) \\
&\qquad - 2\pi \cdot 3^2 \left(\frac{3^3}{2} - \frac{16 \times 3^3}{5} + \frac{47 \times 3^2}{2} - 80 \times 3 + \frac{225}{2}\right) \\
&= 50\pi \left(\frac{625}{6} - 400 + \frac{1175}{2} - 400 + \frac{225}{2}\right) \\
&\qquad - 18\pi \left(\frac{27}{2} - \frac{432}{5} + \frac{423}{2} - 240 + \frac{225}{2}\right) \\
&= 50\pi \left(\frac{625}{6} - 100\right) - 18\pi \left(\frac{195}{2} - \frac{432}{5}\right) \\
&= 50\pi \times \frac{25}{6} - 18\pi \times \frac{111}{10} = \frac{128}{15}\pi
\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{128}{15}\pi}$

実際の曲線は以下の通り



問題 002（バリエーション No.1）

媒介変数 t によって

$$x = \cos t$$
$$y = 2\sin t$$

と表される曲線で囲まれた領域を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は
$V = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ である.

$$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

であるから, この曲線は楕円をなす. $0 \leqq t \leqq \pi$ で x は単調減少であるから, 求める立体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} 4\sin^2 t \cdot (\sin t)\,dt \\ &= 4\pi \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t)\sin t\,dt \\ &= 4\pi \left[-\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi} \\ &= 4\pi \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}\pi \end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{16}{3}\pi}$

問題 003（バリエーション No.2）

媒介変数 t によって

$$x = 2(t - \sin t)$$
$$y = 2(1 - \cos t)$$
$$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

と表される曲線と x 軸で囲まれた部分を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は
$V = \boxed{\text{アイ}}\,\pi^2$ である.

$y = 0$ のとき, $t = 0, 2\pi$ である. $0 \leqq t \leqq 2\pi$ で x は単調増加であるから, 求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} 4(1 - \cos t)^2 \cdot (2(1 - \cos t))\,dt \\ &= 8\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\,dt \\ &= 8\pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\,dt \\ &= 8\pi \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + \frac{3}{2}(1 + \cos 2t) - (1 - \sin^2 t)\cos t\right)dt \\ &= 8\pi \left[t - 3\sin t + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t - \sin t + \frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{2\pi} = 40\pi^2 \end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{40\pi^2}$

問題 004（バリエーション No.1）

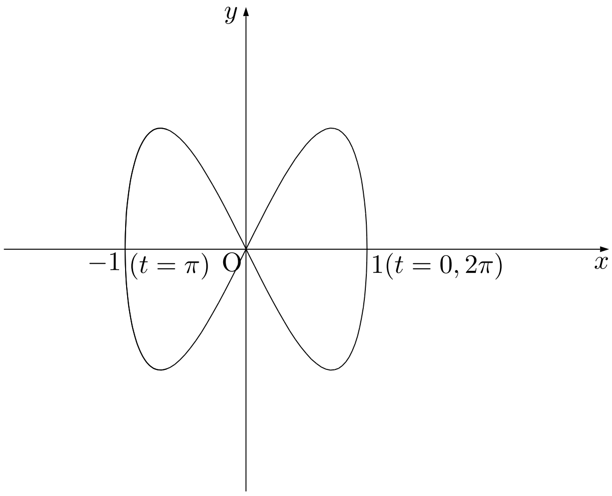
媒介変数 t によって

$$x = \cos t$$
$$y = \sin 2t$$
$$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

と表される曲線で囲まれた領域を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は

$V = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}\pi$ である.

曲線を描くと図のようになる.



よって求める体積 V は $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲で作られる曲線と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積に等しい. この範囲において x は単調減少なので

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{\pi} \sin^2 2t \cdot \sin t\,dt \\
&= \pi \int_0^{\pi} (2\sin t \cos t)^2 \sin t\,dt \\
&= 4\pi \int_0^{\pi} \sin^2 t \cos^2 t \cdot \sin t\,dt \\
&= 4\pi \int_0^{\pi} (1-\cos^2 t)\cos^2 \cdot \sin t\,dt \\
&= 4\pi \left[-\frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{1}{5}\cos^5 t \right]_0^{\pi} = \frac{16}{15}\pi
\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{\dfrac{16}{15}\pi}$

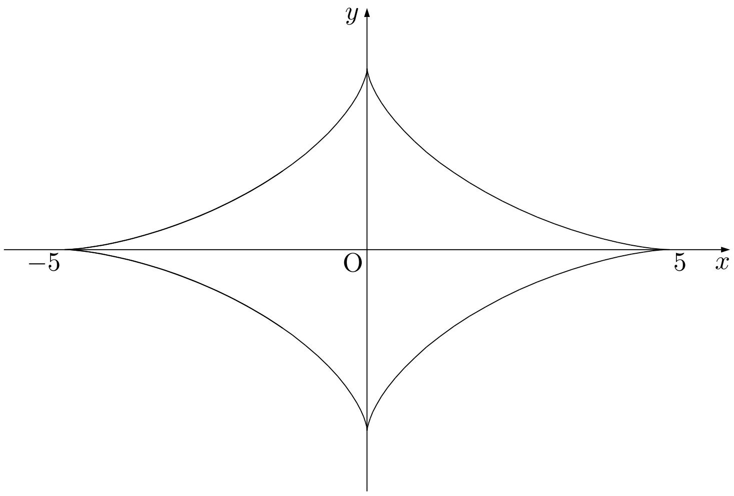
問題 005（バリエーション No.6）

媒介変数 t によって

$$x = 5\cos^3 t$$
$$y = 3\sin^3 t$$
$$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

と表される曲線で囲まれた領域を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は $V = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ である.

曲線を描くと図のようになる.



よって求める体積 V は $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲で作られる曲線と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積に等しい. この範囲において x は単調減少なので

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{\pi} 9\sin^6 t \cdot (15\cos^2 t \sin t)\, dt \\
&= 135\pi \int_0^{\pi} \sin^6 t \cos^2 t \cdot \sin t\, dt \\
&= 135\pi \int_0^{\pi} (1-\cos^2 t)^3 \cos^2 t \cdot \sin t\, dt \\
&= 135\pi \int_0^{\pi} (\cos^2 t - 3\cos^4 t + 3\cos^6 t - \cos^8 t) \cdot \sin t\, dt \\
&= 135\pi \left[-\frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{3}{5}\cos^5 t - \frac{3}{7}\cos^7 t + \frac{1}{9}\cos^9 t \right]_0^{\pi} \\
&= 270\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) \\
&= 270\pi \times \frac{16}{315} = \frac{96}{7}\pi
\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{96}{7}\pi}$

問題 006（バリエーション No.30）

媒介変数 t によって

$$x = 4t^2$$
$$y = 3t^7$$
$$(0 \leqq t \leqq 1)$$

と表される曲線で囲まれた領域を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は

$V = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$ である.

$0 \leqq t \leqq 1$ において x は単調増加なので

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 9t^{14} \cdot 8t\,dt \\ &= 72\pi \int_0^1 t^{15}\,dt \\ &= 72\pi \left[\frac{1}{16}t^{16}\right]_0^1 \\ &= \frac{72}{16}\pi = \frac{9}{2}\pi \end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{9}{2}\pi}$

問題 007（バリエーション No.1）

媒介変数 t によって

$$x = \sqrt{t}$$
$$y = \sqrt{t} - t$$
$$(0 \leqq t \leqq 1)$$

と表される曲線で囲まれた領域を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は

$V = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}\pi$ である.

x はこの範囲で単調増加なので, 求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (\sqrt{t} - t)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (\sqrt{t} - 2t + t\sqrt{t})\,dt \\ &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t} - t^2 + \frac{2}{5}t^2\sqrt{t}\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{3} - 1 + \frac{2}{5}\right)\frac{1}{30}\pi \end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{1}{30}\pi}$