［コース ID：53］　微分積分 III

53.5　数列の極限

53.5.1　数列の極限

問題 001（バリエーション No.1）

次の数列の極限を調べ, 最も適する解答を後の選択肢から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$1,\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3^2},\ \frac{1}{4^2},\ \cdots$$

選択肢：

0 有限の値に収束する
1 正の無限大に発散する
2 負の無限大に発散する
3 振動する (極限はない)

この数列の一般項 a_n は

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

と表される. $k > 0$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. よってこの数列は 0 に収束する.

【答】　0

問題 001（バリエーション No.5）

次の数列の極限を調べ, 最も適する解答を後の選択肢から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ \sqrt{8},\ \sqrt{11},\ \cdots$$

選択肢：

0 有限の値に収束する
1 正の無限大に発散する
2 負の無限大に発散する
3 振動する (極限はない)

この数列の一般項は

$$a_n = \sqrt{3n-1}$$

と表される. $k > 0$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^k = +\infty$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{3n-1} = +\infty$ よって, この数列は正の無限大に発散する.

【答】　1

問題 001（バリエーション No.7）

次の数列の極限を調べ, 最も適する解答を後の選択肢から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$1,\ e,\ e^2,\ e^3,\ e^4, \cdots$$

選択肢：

0 有限の値に収束する
1 正の無限大に発散する
2 負の無限大に発散する
3 振動する (極限はない)

この数列の一般項は

$$a_n = e^{n-1}$$

と表される. $r > 1$ のとき, $\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$ であるから $\lim_{n\to\infty} e^{n-1} = +\infty$

【答】 1

問題 001（バリエーション No.11）

次の数列の極限を調べ, 最も適する解答を後の選択肢から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

$$1-2^2,\ 2-3^2,\ 3-4^2,\ 4-5^2, \cdots$$

選択肢：

0 有限の値に収束する
1 正の無限大に発散する
2 負の無限大に発散する
3 振動する (極限はない)

この数列の一般項は

$$a_n = n-(n+1)^2$$

と表される. $a_n = -n^2 - n - 1 = -n^2\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$ であり,

$$\lim_{n\to\infty}(-n^2) = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1$$

より $\lim_{n\to\infty}(n-(n+1)^2) = -\infty$

【答】 2

問題 002（バリエーション No.1）

第 n 項が

$$\frac{n^2+1}{2n^2-5n}$$

で表される数列の極限値は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である.

分子と分母を n^2 で割ると

$$\frac{n^2+1}{2n^2-5n}=\frac{1+\dfrac{1}{n^2}}{2-\dfrac{5}{n}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0,\ \ \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}=0$ より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2-5n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n^2}}{2-\dfrac{5}{n}}\\&=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

問題 002（バリエーション No.44）

第 n 項が

$$\frac{5n^3+2n^2+n}{7n^3+n^2+8}$$

で表される数列の極限値は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である.

分子と分母を n^3 で割ると

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3+2n^2+n}{7n^3+n^2+8}&=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{7+\dfrac{1}{n}+\dfrac{8}{n^3}}\\&=\frac{5+0+0}{7+0+0}=\frac{5}{7}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{5}{7}}$

問題 003（バリエーション No.10）

第 n 項が

$$\sqrt{4n^2+9n+3}-\sqrt{4n^2-5n+2}$$

で表される数列の極限値は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である.

第 1 項と第 2 項ともに正の無限大 $+\infty$ に発散してしまい, このままでは $\infty-\infty$ となり値が分からない (不定形という). そこで $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ の公式を使って式を変形する.

$$\begin{aligned}\sqrt{4n^2+9n+3}-\sqrt{4n^2-5n+2}&=\frac{\left(\sqrt{4n^2+9n+3}\right)^2-\left(\sqrt{4n^2-5n+2}\right)^2}{\sqrt{4n^2+9n+3}+\sqrt{4n^2-5n+2}}\\&=\frac{\left(4n^2+9n+3\right)-\left(4n^2-5n+2\right)}{\sqrt{4n^2+9n+3}+\sqrt{4n^2-5n+2}}\\&=\frac{14n+1}{\sqrt{4n^2+9n+3}+\sqrt{4n^2-5n+2}}\end{aligned}$$

分母と分子を n で割れば

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+9n+3}-\sqrt{4n^2-5n+2}\right)&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{14n+1}{\sqrt{4n^2+9n+3}+\sqrt{4n^2-5n+2}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{14+\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{9}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{4-\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}}\\&=\frac{14+0}{\sqrt{4+0+0}+\sqrt{4-0+0}}\\&=\frac{14}{2+2}=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\frac{7}{2}}$

問題 004（バリエーション No.5）

第 n 項が

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2+5n+2}-\sqrt{4n^2+4n+1}}$$

で表される数列の極限値は $\boxed{\text{ア}}$ である.

こちら $n\to\infty$ のときに分母が $\infty-\infty$ の形 (不定形) となりこのままでは値が分からない. 分子と分母に $\sqrt{4n^2+5n+2}+\sqrt{4n^2+4n+1}$ をかけると

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{4n^2+5n+2}-\sqrt{4n^2+4n+1}}&=\frac{\sqrt{4n^2+5n+2}+\sqrt{4n^2+4n+1}}{\left(\sqrt{4n^2+5n+2}\right)^2-\left(\sqrt{4n^2+4n+1}\right)^2}\\&=\frac{\sqrt{4n^2+5n+2}+\sqrt{4n^2+4n+1}}{(4n^2+5n+2)-(4n^2+4n+1)}\\&=\frac{\sqrt{4n^2+5n+2}+\sqrt{4n^2+4n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

分子と分母を n で割れば

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+5n+2}-\sqrt{4n^2+4n+1}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+5n+2}+\sqrt{4n^2+4n+1}}{n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}}\\&=\frac{\sqrt{4+0+0}+\sqrt{4+0+0}}{1+0}=2+2=4\end{aligned}$$

【答】　4