［コース ID：53］　微分積分 III

53.2　極座標による図形

53.2.1　極座標による図形

問題 001（バリエーション No.115）

極座標 $\left(8,\ -\dfrac{\pi}{6}\right)$ を直交座標で表すと $\left(\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}},\ \boxed{\text{ウエ}}\right)$ となる.

平面上の点を, 原点からの距離 (動径) と x 軸との成す角 (偏角) で表す座標系をを極座標という. また, 従来の x, y による表し方は直交座標 (デカルト座標) と呼ばれる.
直交座標系において (x, y) の位置にある点 P を考えると, 原点 O からの距離 r は

$$r = \mathrm{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

と表せる. また, OP が x 軸となす角を θ とすると,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

が成り立つ. $r = 8,\ \theta = -\dfrac{\pi}{6}$ を代入すると

$$x = 8\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$y = 8\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

よって直交座標では $(4\sqrt{3},\ -4)$ に対応する

【答】　$\boldsymbol{(4\sqrt{3},\ -4)}$

問題 002（バリエーション No.33）

直交座標 $(-2\sqrt{3},\ 2)$ を極座標で表すと $\left(\boxed{\text{ア}},\ \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi\right)$ となる.
ただし, 偏角 θ は $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲とする.

原点からの距離 r は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ で与えられるので計算すると

$$r = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

偏角を θ とすると $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ であるから

$$-2\sqrt{3} = 4\cos\theta, \quad 2 = 4\sin\theta$$

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ より $\theta = \dfrac{5}{6}\pi$ である. よって極座標表示では $\left(4,\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$ となる.

【答】 $\left(\mathbf{4},\ \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\boldsymbol{\pi}\right)$

問題 003（バリエーション No.1）

極方程式

$$r = 2\theta \ \left(\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi\right)$$

で表される曲線と, x 軸, y 軸によって囲まれた図形の面積 S は

$S = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}\pi^3$ である.

$r = f(\theta)$ で表される曲線と 線分 $\theta = a, \theta = b$ で囲まれる部分の図形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b \{f(\theta)\}^2\,d\theta$$

と表される. x 軸は $\theta = pi$, y 軸は $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ と書けるので, 求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 4\theta^2\,d\theta \\ &= 2\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \frac{2}{3}\left(\pi^3 - \frac{\pi^3}{8}\right) = \frac{7}{12}\pi^3 \end{aligned}$$

【答】 $\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{12}}\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{3}}$

問題 003（バリエーション No.36）

極方程式

$$r = \sin\theta + 1\,(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

で表される曲線によって囲まれた図形の面積 S は

$S = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$ である.

求める図形の面積は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\sin\theta + 1)^2\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta + 2\sin\theta + 1)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2} + 2\sin\theta + 1\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta - 2\cos\theta + \theta\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

【答】 $\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\pi}$

問題 004（バリエーション No.10）

極方程式

$$r = 5\sin\theta$$

によって表される曲線の, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分の長さ L を求めよ.
解答は以下の選択肢より選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

⓪ 5π
① $5\pi - 1$
② $5\pi - 2$
③ $5\pi + 1$
④ $10\pi - 2$
⑤ $10\pi - 1$
⑥ 10π
⑦ $10\pi + 1$

$r = f(\theta)$ で表される曲線の $a \leqq \theta \leqq b$ の部分の長さ L は

$$L = \int_a^b \sqrt{\{f(\theta)\}^2 + \{f'(\theta)\}^2}\, d\theta$$

で与えられる. よって求める長さ L は

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi \sqrt{25\sin^2\theta + 25\cos^2\theta}\, d\theta \\ &= 5\pi \end{aligned}$$

【答】 ⓪

問題 004（バリエーション No.20）

極方程式

$$r = 2\cos\theta + 2\sin\theta$$

によって表される曲線の, $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さ L を求めよ.
解答は以下の選択肢より選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

⓪ $\dfrac{\pi}{2}$
① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$
② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$
③ $\sqrt{2}\pi$
④ $\sqrt{3}\pi$
⑤ π
⑥ 2π
⑦ 3π

求める曲線の長さ L は

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(2\cos\theta + 2\sin\theta)^2 + (-2\sin\theta + 2\cos\theta)^2}\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{(\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta) + (\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)}\,d\theta \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= 2\sqrt{2} \times \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\pi
\end{aligned}
$$

【答】　$\boldsymbol{\sqrt{2}\pi}$

問題 004（バリエーション No.22）

極方程式

$$r = \theta^2 - 1$$

によって表される曲線の, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分の長さ L を求めよ.

解答は以下の選択肢より選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

0. $\dfrac{\pi^3}{3} + \pi$
1. $\dfrac{\pi^3}{3} + 2\pi$
2. $\dfrac{\pi^3}{3} + 3\pi$
3. $\dfrac{\pi^3}{3} + 4\pi$
4. $\dfrac{\pi^3}{3} - \pi$
5. $\dfrac{\pi^3}{3} - 2\pi$
6. $\dfrac{\pi^3}{3} - 3\pi$
7. $\dfrac{\pi^3}{3} - 4\pi$

求める曲線の長さ L は

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi} \sqrt{(\theta^2 - 1)^2 + 4\theta^2}\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{\theta^4 + 2\theta^2 + 1}\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{(\theta^2 + 1)^2}\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} (\theta^2 + 1)\,d\theta \\
&= \left[\frac{1}{3}\theta^3 + \theta\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} + \pi
\end{aligned}
$$

【答】　0