［コース ID：53］　微分積分 III

53.12　極大・極小

53.12.1　極大・極小

問題 001（バリエーション No.5）

以下の設問で, 空欄 $\boxed{\text{シ}}$ は,

⓪ 極大
① 極小

のいずれかを選んでその番号をマークせよ.

2 変数関数

$$f(x,y)=x^3+6xy+y^3$$

の極値を求めよう.
曲面 $f(x,y)$ 上の点 $(a,b,f(a,b))$ でこの関数が極値をとるならば, $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ であることが必要条件なので, これを満たすような a, b を求めると,
$(a,b)=\left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウエ}}\right)$ または $(a,b)=\left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$ が得られる.
$(a,b)=\left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウエ}}\right)$ のとき, $\{f_{xy}(a,b)\}^2-f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)=\boxed{\text{キクケコ}}$
$(a,b)=\left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$ のとき, $\{f_{xy}(a,b)\}^2-f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)=\boxed{\text{サ}}$
であることより, 関数 $f(x,y)$ は $x=\boxed{\text{アイ}}$, $y=\boxed{\text{ウエ}}$ のとき $\boxed{\text{シ}}$ で, 極値は $\boxed{\text{ス}}$ である.

関数 $f(x,y)$ の偏導関数を求めると

$$f_x(x,y)=3x^2+6y$$

$$f_y(x,y)=6x+3y^2$$

よって $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ のとき

$$\begin{cases}3a^2+6b=0\\6a+3b^2=0\end{cases}$$

第 1 式から $b=-\dfrac{1}{2}a^2$ なので, これを第 2 式に代入すると $6a+\dfrac{3}{4}a^4=0$ となる.

$$6a+\frac{3}{4}a^4=\frac{3}{4}a(8+a^3)=0$$

より, $a=-2,0$ であり, $a=-2$ のとき $b=-2$, $a=0$ のとき $b=0$ である. よって, 極値をとる点の候補は $\boldsymbol{(a,b)=(-2,-2)}$ または $\boldsymbol{(a,b)=(0,0)}$ の 2 点である.
次に $f(x,y)$ の第 2 次偏導関数を求めると

$$f_{xx}(x,y)=6x,\quad f_{xy}(x,y)=6,\quad f_{yy}(x,y)=6y$$

となるので, $\{f_{xy}(x,y)\}^2-f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)=36-36xy$ となる. よって

$$(a,b)=(-2,-2)\ \text{のとき,}\ \{f_{xy}(-2,-2)\}^2-f_{xx}(-2,-2)f_{yy}(-2,-2)=36-36\cdot4=\boldsymbol{-108}$$

$$(a,b)=(0,0)\ \text{のとき,}\ \ \{f_{xy}(0,0)\}^2-f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)=36-36\cdot 0=\mathbf{36}$$

点 (a,b) で極値をとるとき $\{f_{xy}(a,b)\}^2-f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)<0$ となるので, $f(x,y)$ は $x=-2,\ y=-2$ で極値をとる. 特に $f_{xx}(-2,-2)=-6<0$ より, この点で極大値をとることが分かり, その値は

$$f(-2,-2)=-8+24-8=8$$

以上から, $x=\mathbf{-2},\ y=\mathbf{-2}$ のとき **極大** で, 極値は **8** である.

問題 001（バリエーション No.14）

以下の設問で, 空欄 $\boxed{\text{シ}}$ は,

⓪ 極大
① 極小

のいずれかを選んでその番号をマークせよ.

2 変数関数

$$f(x,y)=x^3+6xy-9x+y^2-8y$$

の極値を求めよう.
曲面 $f(x,y)$ 上の点 $(a,b,f(a,b))$ でこの関数が極値をとるならば, $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ であることが必要条件なので, これを満たすような $a,\ b$ を求めると,
$(a,b)=\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イウエ}}\right)$ または $(a,b)=\left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$ が得られる.
$(a,b)=\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イウエ}}\right)$ のとき, $\{f_{xy}(a,b)\}^2-f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)=\boxed{\text{キクケ}}$
$(a,b)=\left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$ のとき, $\{f_{xy}(a,b)\}^2-f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)=\boxed{\text{コサ}}$
であることより, 関数 $f(x,y)$ は $x=\boxed{\text{ア}}$, $y=\boxed{\text{イウエ}}$ のとき $\boxed{\text{シ}}$ で, 極値は $\boxed{\text{スセソ}}$ である.

関数 $f(x,y)$ の偏導関数を求めると

$$f_x(x,y)=3x^2+6y-9$$

$$f_y(x,y)=6x+2y-8$$

よって $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ のとき

$$\begin{cases}3a^2+6b-9=0\\6a+2b-8=0\end{cases}$$

第 2 式から $b=-3a+4$ なので, これを第 1 式に代入すると $3a^2-18a+15=0$ となる.

$$3a^2-18a+15=3(a-1)(a-5)=0$$

より, $a=1,5$ であり, $a=1$ のとき $b=-3+4=1$, $a=5$ のとき $b=-15+4=-11$ である. よって, 極値をとる点の候補は $\boldsymbol{(a,b)=(5,-11)}$ または $\boldsymbol{(a,b)=(1,1)}$ の 2 点である.

次に $f(x,y)$ の第 2 次偏導関数を求めると

$$f_{xx}(x,y)=6x,\quad f_{xy}(x,y)=6,\quad f_{yy}(x,y)=2$$

となるので, $\{f_{xy}(x,y)\}^2-f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)=36-12x$ となる. よって

$$(a,b)=(5,-11)\ \text{のとき,}\ \ \{f_{xy}(5,-11)\}^2-f_{xx}(5,-11)f_{yy}(5,-11)=36-12\cdot 5=\mathbf{-24}$$

$$(a,b)=(1,1) \text{ のとき，} \{f_{xy}(1,1)\}^2 - f_{xx}(1,1)f_{yy}(1,1) = 36 - 12\cdot 1 = \mathbf{24}$$

点 (a,b) で極値をとるとき $\{f_{xy}(a,b)\}^2 - f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) < 0$ となるので, $f(x,y)$ は $x=5,\ y=-11$ で極値をとる. 特に $f_{xx}(5,-11)=30>0$ より, この点で極小値をとることが分かり, その値は

$$f(5,-11) = 125 - 330 - 45 + 121 + 88 = -41$$

以上から, $x=\mathbf{5},\ y=\mathbf{-11}$ のとき **極小** で, 極値は $\mathbf{-41}$ である.

問題 002（バリエーション No.6）

以下の設問で, 空欄 サ は,

⓪ 極大
① 極小

のいずれかを選んでその番号をマークせよ.

2 変数関数

$$f(x,y) = x^3 - 3x + y^2$$

の極値を求めよう.
曲面 $f(x,y)$ 上の点 $(a,b,f(a,b))$ でこの関数が極値をとるならば, $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ であることが必要条件なので, これを満たすような a, b を求めると,
$(a,b)=($ ア , イ $)$ または $(a,b)=($ ウエ , オ $)$ が得られる.
$(a,b)=($ ア , イ $)$ のとき, $\{f_{xy}(a,b)\}^2 - f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) =$ カキク
$(a,b)=($ ウエ , オ $)$ のとき, $\{f_{xy}(a,b)\}^2 - f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) =$ ケコ
であることより, 関数 $f(x,y)$ は $x=$ ア , $y=$ イ のとき サ で, 極値は シス である.

関数 $f(x,y)$ の偏導関数を求めると

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3$$

$$f_y(x,y) = 2y$$

よって $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ のとき

$$\begin{cases} 3a^2 - 3 = 0 \\ 2b = 0 \end{cases}$$

この式から $\boldsymbol{(a,b)=(1,0)}$ または $\boldsymbol{(a,b)=(-1,0)}$ が得られる.
次に $f(x,y)$ の第 2 次偏導関数を求めると

$$f_{xx}(x,y) = 6x,\quad f_{xy}(x,y) = 0,\quad f_{yy}(x,y) = 2$$

となるので, $\{f_{xy}(x,y)\}^2 - f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) = -12x$ となる. よって

$$(a,b)=(1,0) \text{ のとき，} \{f_{xy}(1,0)\}^2 - f_{xx}(1,0)f_{yy}(1,0) = \mathbf{-12}$$

$$(a,b)=(-1,0) \text{ のとき，} \{f_{xy}(-1,0)\}^2 - f_{xx}(-1,0)f_{yy}(-1,0) = \mathbf{12}$$

よって $f(x,y)$ は $x=1,\ y=0$ で極値をとる. 特に $f_{xx}(1,0)=6>0$ より, この点で極小値をとることが分かり, その値は

$$f(1,0) = 1 - 3 = -2$$

以上から, $x = \mathbf{1}$, $y = \mathbf{0}$ のとき **極小** で, 極値は $\mathbf{-2}$ である.

問題 003（バリエーション No.15）

以下の設問で, 空欄 $\boxed{\text{ス}}$ は,

⓪ 極大
① 極小

のいずれかを選んでその番号をマークせよ.

2 変数関数

$$f(x,y) = x^2 + 4x + y^3 - 3y$$

の極値を求めよう.
曲面 $f(x,y)$ 上の点 $(a,b,f(a,b))$ でこの関数が極値をとるならば, $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ であることが必要条件なので, これを満たすような a, b を求めると,
$(a,b) = \left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$ または $(a,b) = \left(\boxed{\text{エオ}},\ \boxed{\text{カキ}}\right)$ が得られる.
$(a,b) = \left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$ のとき, $\{f_{xy}(a,b)\}^2 - f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) = \boxed{\text{クケコ}}$
$(a,b) = \left(\boxed{\text{エオ}},\ \boxed{\text{カキ}}\right)$ のとき, $\{f_{xy}(a,b)\}^2 - f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) = \boxed{\text{サシ}}$
であることより, 関数 $f(x,y)$ は $x = \boxed{\text{アイ}}$, $y = \boxed{\text{ウ}}$ のとき $\boxed{\text{ス}}$ で, 極値は $\boxed{\text{セソ}}$ である.

関数 $f(x,y)$ の偏導関数を求めると

$$f_x(x,y) = 2x + 4$$

$$f_y(x,y) = 3y^2 - 3$$

よって $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ のとき

$$\begin{cases} 2a + 4 = 0 \\ 3b^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

この式から $\boldsymbol{(a,b) = (-2,1)}$ または $\boldsymbol{(a,b) = (-2,-1)}$ が得られる.
次に $f(x,y)$ の第 2 次偏導関数を求めると

$$f_{xx}(x,y) = 2,\quad f_{xy}(x,y) = 0,\quad f_{yy}(x,y) = 6y$$

となるので, $\{f_{xy}(x,y)\}^2 - f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) = -12y$ となる. よって

$$(a,b) = (-2,1)\ \text{ のとき,}\ \ \{f_{xy}(-2,1)\}^2 - f_{xx}(-2,1)f_{yy}(-2,1) = \mathbf{-12}$$

$$(a,b) = (-2,-1)\ \text{ のとき,}\ \ \{f_{xy}(-2,-1)\}^2 - f_{xx}(-2,-1)f_{yy}(-2,-1) = \mathbf{12}$$

よって $f(x,y)$ は $x = -2$, $y = 1$ で極値をとる. 特に $f_{xx}(-2,1) = 2 > 0$ より, この点で極小値をとることが分かり, その値は

$$f(-2,1) = 4 - 8 + 1 - 3 = -6$$

以上から, $x = \mathbf{-2}$, $y = \mathbf{1}$ のとき **極小** で, 極値は $\mathbf{-6}$ である.