［コース ID：53］　微分積分 III

53.4　多項式による近似

53.4.1　多項式による近似 (1)

問題 001（バリエーション No.2）

関数 $f(x) = \sin x$ の $x = \dfrac{\pi}{6}$ における 1 次の近似式を, 次の選択肢のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

0 x
1 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + \dfrac{1}{2}$
2 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3 $\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
4 $-\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{2}{3}\pi\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
5 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \dfrac{3}{4}\pi\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
6 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{5}{6}\pi\right) + \dfrac{1}{2}$
7 $-x + \pi$

関数 $f(x)$ の $x = a$ における 1 次の近似式は

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x - a)$$

で与えられる. $f'(x) = \cos x$ より, その近似式は

$$f(x) \simeq \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \times \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

【答】　1

問題 002（バリエーション No.2）

関数 $f(x)=\sqrt{x}$ の $x=4$ における 1 次の近似式を, 次の選択肢のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

⓪ $\dfrac{1}{4}x-1$
① $\dfrac{1}{4}x+1$
② $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$
③ $-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}$
④ $2x+\dfrac{1}{4}$
⑤ $4x-\dfrac{1}{2}$
⑥ $\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{2}$
⑦ $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ であるから, 1 次の近似式は

$$f(x)\simeq\sqrt{4}+\frac{1}{2\sqrt{4}}\times(x-4)=2+\frac{1}{4}(x-4)=\frac{1}{4}x+1$$

【答】 ①

問題 003（バリエーション No.10）

関数 $f(x)=\log x$ の $x=\dfrac{1}{e^5}$ における 1 次の近似式を, 次の選択肢のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

⓪ e^5x-4
① e^5x-5
② e^5x-6
③ e^5x-7
④ e^5x+4
⑤ e^5x+5
⑥ e^5x+6
⑦ e^5x+7

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ であるから 1 次の近似式は

$$f(x)\simeq\log\frac{1}{e^5}+e^5\left(x-\frac{1}{e^5}\right)=-5+e^5x-1=e^5x-6$$

【答】 ②

問題 004（バリエーション No.15）

関数 $f(x) = e^{-x}$ の $x = -4$ における 1 次の近似式を, 次の選択肢のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

⓪ $-e^4x + 2e^4$
① $-e^4x + 3e^4$
② $-e^4x + 4e^4$
③ $-e^4x - 2e^4$
④ $-e^4x - 3e^4$
⑤ $-e^4x - 4e^4$
⑥ $-4e^4x + e^4$
⑦ $-4e^4x - e^4$

$f'(x) = -e^{-x}$ より 1 次の近似式は

$$f(x) \simeq e^4 + (-e^4)(x+4) = -e^4x - 3e^4$$

【答】 ④

問題 005（バリエーション No.1）

関数 $f(x) = \tan x$ の $x = \dfrac{\pi}{4}$ における 1 次の近似式を, 次の選択肢のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

⓪ $2x + \dfrac{\pi}{2} + 1$
① $2x - \dfrac{\pi}{2} + 1$
② $2x + \dfrac{\pi}{2} - 1$
③ $2x - \dfrac{\pi}{2} - 1$
④ $2x + \dfrac{\pi}{4} + 1$
⑤ $2x - \dfrac{\pi}{4} + 1$
⑥ $2x + \dfrac{\pi}{4} - 1$
⑦ $2x - \dfrac{\pi}{4} - 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ より 1 次の近似式は

$$f(x) \simeq \tan\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$$

【答】 ①

問題 006（バリエーション No.23）

関数 $f(x) = \tan x$ の $x = \dfrac{\pi}{6}$ での 2 次の近似式において，x^2 の係数は $\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$ である．

関数 $f(x)$ の $x = a$ における 2 次の近似式は

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

と表される．$f(x) = \tan x$ とすると $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$，　$f''(x) = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq \tan\frac{\pi}{6} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{6}}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sin\frac{\pi}{6}}{\cos^3\frac{\pi}{6}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 \end{aligned}$$

よって x^2 の係数は $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

【答】　$\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{9}}$

問題 007（バリエーション No.3）

関数 $f(x) = e^x$ の $x = 2$ における 2 次の近似式を，次の選択肢のなかから選び，その番号を $\boxed{ア}$ へマークせよ．

⓪ $\dfrac{e^2}{2}\left(x^2 + x + 1\right)$

① $-\dfrac{e^2}{2}\left(x^2 + x + 1\right)$

② $\dfrac{e^2}{2}\left(x^2 - x + 1\right)$

③ $-\dfrac{e^2}{2}\left(x^2 - x + 1\right)$

④ $\dfrac{e^2}{2}\left(x^2 - 2x + 2\right)$

⑤ $-\dfrac{e^2}{2}\left(x^2 - 2x + 2\right)$

⑥ $\dfrac{e^2}{2}\left(x^2 + 2x - 1\right)$

⑦ $-\dfrac{e^2}{2}\left(x^2 + 2x - 1\right)$

$f'(x) = f''(x) = e^x$ であるから $x = 2$ における 2 次の近似式は

$$f(x) \simeq e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2}(x-2)^2 = \frac{e^2}{2}(2 + 2(x-2) + (x-2)^2) = \frac{e^2}{2}(x^2 - 2x + 2)$$

【答】　④

問題 008（バリエーション No.19）

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ の $x=1$ における 2 次の近似式を用いて, 次の近似値を既約分数で求めよ.

$$f\left(\frac{11}{10}\right) \fallingdotseq \frac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エオカ}}}$$

$f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\ f''(x) = -\dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ であるから, $x=1$ における 2 次の近似式は

$$f(x) \simeq 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2$$

となるので $x = \dfrac{11}{10}$ を代入すると

$$\begin{aligned} f\left(\frac{11}{10}\right) &\fallingdotseq 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10} - \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{30} - \frac{1}{900} \\ &= \frac{900+30-1}{900} = \frac{929}{900} \end{aligned}$$

【答】 $\mathbf{\dfrac{929}{900}}$

問題 008（バリエーション No.40）

$f(x) = \log x$ の $x=1$ における 2 次の近似式を用いて, 次の近似値を既約分数で求めよ.

$$f\left(\frac{9}{10}\right) \fallingdotseq \frac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エオカ}}}$$

$f'(x) = \dfrac{1}{x},\ f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ より $x=1$ における 2 次の近似式は

$$f(x) \simeq (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

$x = \dfrac{9}{10}$ を代入すると

$$\begin{aligned} f\left(\frac{9}{10}\right) &\fallingdotseq -\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)^2 \\ &= -\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{200}\right) \\ &= -\frac{21}{200} \end{aligned}$$

【答】 $\mathbf{\dfrac{-21}{200}}$

53.4.2　多項式による近似 (2)

問題 001（バリエーション No.2）

関数 $f(x) = e^{2x}$ を $x = 0$ における n 次の多項式で近似したときの, x^4 の係数は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である.

関数 $f(x)$ の $x = a$ における n 次の多項式による近似は

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

で与えられる. $f'(x) = 2e^{2x},\ f''(x) = 4e^{2x}, \cdots, f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$ であるから, $x = 0$ における n 次式での近似は

$$f(x) \simeq 1 + 2x + \frac{2^2}{2}x^2 + \cdots + \frac{2^n}{n!}x^n$$

となる. よって x^4 の係数は $\dfrac{2^4}{4!} = \dfrac{2}{3}$

【答】 $\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

問題 003（バリエーション No.3）

関数 $f(x) = \log(3x+1)$ を $x = 0$ における n 次の多項式で近似したときの, x^4 の係数は $\dfrac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である.

$f(x)$ を微分していくと

$$f'(x) = \frac{3}{3x+1},\ f''(x) = -\frac{9}{(3x+1)^2},\ \cdots,\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{3^n \cdot (n-1)!}{(3x+1)^n}$$

となるので, n 次式のよる近似は

$$f(x) \simeq 3x - \frac{9}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{3^n \cdot (n-1)!}{n!}x^n$$

となる. よって x^4 の係数は $(-1)^3\dfrac{3^4 \cdot 3!}{4!} = -\dfrac{81}{4}$

【答】 $\mathbf{\dfrac{-81}{4}}$

問題 003（バリエーション No.4）

関数 $f(x) = \sin 4x$ を $x = 0$ における n 次の多項式で近似したときの, x^5 の係数は $\dfrac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である.

$f(x)$ を微分していくと

$$f'(x) = 4\cos 4x,\ f''(x) = -16\sin 4x,\ f^{(3)}(x) = -4^3\cos 4x,\ f^{(4)}(x) = 4^4\sin 4x$$

となるので $f^{(5)}(x) = 4^5 \cos 4x$ である.

$x = 0$ における n 次式による近似の x^5 の係数は $\dfrac{f^{(5)}(0)}{5!}$ で与えられるので計算すると

$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{4^5}{5!} = \frac{128}{15}$$

【答】 $\mathbf{\dfrac{128}{15}}$

問題 004（バリエーション No.75）

関数 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ の $x = 0$ における 4 次の近似式を使って, 次の値の近似値を既約分数で答えよ.

$$f\left(\frac{3}{10}\right) \fallingdotseq \frac{\boxed{\text{アイウエオ}}}{\boxed{\text{カキクケコ}}}$$

$f(x) = (1-x)^{-1}$ より $f(x)$ を微分していくと

$$f'(x) = (1-x)^{-2},\ f''(x) = 2(1-x)^{-3},\ f^{(3)}(x) = 3!(1-x)^{-4},\ f^{(4)}(x) = 4!(1-x)^{-5}$$

よって 4 次の近似式は

$$f(x) \simeq 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

$x = \dfrac{3}{10}$ を代入すると

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{10}\right) &\fallingdotseq 1 + \frac{3}{10} + \frac{3^2}{10^2} + \frac{3^3}{10^3} + \frac{3^4}{10^4} \\ &= \frac{10^4 + 3\cdot 10^3 + 3^2\cdot 10^2 + 3^3\cdot 10 + 3^4}{10000} \\ &= \frac{14251}{10000} \end{aligned}$$

【答】 $\mathbf{\dfrac{14251}{10000}}$

近似値は 1.4251 であるが, 実際の値は $f\left(\dfrac{3}{10}\right) = \dfrac{1}{1-\dfrac{3}{10}} = \dfrac{10}{7} = 1.428571\cdots$ なので, まあまあな近似である.