# ［コース ID：53］　微分積分 III

## 53.6　級数

### 53.6.1　級数

**問題 001（バリエーション No.1）**

無限級数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$$

の和は $\boxed{\text{ア}}$ である.

この級数における $n$ 番目の項は $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ と表せる.

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

より, 第 $n$ 項までの部分和 $S_n$ を考えると

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

よって, この級数の和は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=1$ となる.

**【答】**　**1**

**問題 001（バリエーション No.15）**

無限級数

$$\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 14}+\cdots$$

の和は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である.

この級数の $n$ 番目の項を $a_n$ とすると, $a_n=\dfrac{1}{(3n+2)(3n+5)}$ である.

$$a_n=\frac{1}{(3n+2)(3n+5)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+5}\right)$$

であるから, 第 $n$ 項までの部分和 $S_n$ を考えると

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(3n+2)(3n+5)}\\&=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+5}\right)\right\}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3n+5}\right)=\frac{1}{15}-\frac{1}{3(3n+5)}\end{aligned}$$

よってこの級数の和は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{15}$ となる．

**【答】** $\mathbf{\dfrac{1}{15}}$

**問題 001（バリエーション No.20）**

無限級数

$$\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^4}\right)+\left(\frac{1}{3^3}-\frac{1}{2^5}\right)+\left(\frac{1}{3^4}-\frac{1}{2^6}\right)+\cdots$$

の和は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ である．

この級数における $n$ 番目の項を $a_n$ とすると $a_n = \dfrac{1}{3^{n+1}} - \dfrac{1}{2^{n+3}}$ と表せる．第 $n$ 項までの部分和 $S_n$ を考えると

$$\begin{aligned}
S_n &= \left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^4}\right)+\left(\frac{1}{3^3}-\frac{1}{2^5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+3}}\right) \\
&= \frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)-\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) \\
&= \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{3^2\left(1-\frac{1}{3}\right)}-\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{2^4\left(1-\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}-\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}
\end{aligned}$$

よってこの級数の和は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$ となる．

**【答】** $\mathbf{\dfrac{1}{24}}$

**問題 002（バリエーション No.10）**

循環小数 $3.\dot{5}\dot{4}$ を分数で表すと $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ となる．

循環小数を級数の形に書き直すと

$$3.\dot{5}\dot{4} = 3.545454\cdots = 3+\frac{54}{100}+\frac{54}{10000}+\frac{54}{1000000}+\cdots$$

となる．この級数の $n$ 番目の項を $a_n$ とすると $a_1=3,\ a_n=\dfrac{54}{100^{n-1}}\ (n \geqq 2)$ と表せる．

第 $n$ 項までの部分和 $S_n$ $(n \geqq 2)$ を考えると

$$\begin{aligned} S_n &= 3 + \frac{54}{100} + \cdots + \frac{54}{100^{n-1}} \\ &= 3 + \frac{54}{100}\left(1 + \cdots + \frac{1}{100^{n-2}}\right) \\ &= 3 + \frac{54}{100} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{100}} \\ &= 3 + \frac{6}{11}\left(1 - \frac{1}{100^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

よって循環小数の値は

$$\begin{aligned} 3.\dot{5}\dot{4} &= \lim_{n \to \infty} S_n \\ &= 3 + \frac{6}{11} = \frac{39}{11} \end{aligned}$$

**【答】** $\boldsymbol{\dfrac{39}{11}}$

**問題 003（バリエーション No.1）**

あるボールを床に落とすと, ボールは常に落とした高さの $\dfrac{3}{5}$ まで跳ね返るという.
このボールを 3m の高さから落としたとき, 床に静止するまでにボールが上下した距離の総和は $\boxed{\textbf{アイ}}$ m である.

ボールを 3m の高さから落としているので, 1 度目は $3 \times \dfrac{3}{5}$ m までの高さまで跳ね返り, 2 度目は $3 \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^2$ m の高さまで跳ね返り, 以下同様にして, $n$ 度目は $3 \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ m の高さまで跳ね返る.
よって $n \geqq 2$ として $n$ 回床に触れたときの上下した距離の和を $S_n$ とすると

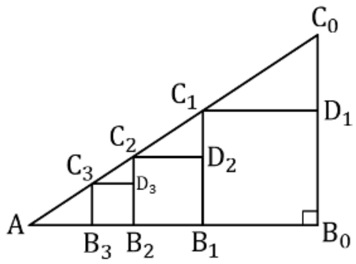
$$\begin{aligned} S_n &= 3 + 2\left(3 \times \frac{3}{5} + 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cdots + 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right) \\ &= 3 + \frac{18}{5}\left(1 + \frac{3}{5} + \cdots + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}\right) \\ &= 3 + \frac{18}{5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{5}} \\ &= 3 + 9\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right) \end{aligned}$$

よって床に制止するまでに上下した距離の総和は $\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n = 3 + 9 = 12$ m である.

**【答】** **12** m

**問題 001（バリエーション No.31）**

図のように, $\angle \mathrm{B_0} = 90^\circ$, $\mathrm{AB_0} = 4$, $\mathrm{B_0C_0} = 3$ の直角三角形 $\mathrm{AB_0C_0}$ の内部に, 正方形 $\mathrm{B_0B_1C_1D_1}$, $\mathrm{B_1B_2C_2D_2}$, $\mathrm{B_2B_3C_3D_3}, \cdots$ を限りなく作っていく.
$n$ 番目の正方形 $\mathrm{B_{n-1}B_nC_nD_n}$ の 1 辺の長さを $a_n$, 面積を $S_n$ とするとき,
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり,
無限級数 $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots$ の和は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である.




$a_n = \mathrm{B_{n-1}B_n} = \mathrm{B_nC_n}$ であることに注意して, まず $a_1$ を求めてみよう. $\mathrm{B_0B_1} = a_1$ とおくと, $\mathrm{AB_1} = 4 - a_1$ であり, 三角形 $\mathrm{AB_0C_0}$ と 三角形 $\mathrm{AB_1C_1}$ は相似であるから

$$\mathrm{AB_0} : \mathrm{AB_1} = \mathrm{B_0C_0} : \mathrm{B_1C_1}$$

である. それぞれ値を代入すると

$$4 : 4 - a_1 = 3 : a_1$$

となるので, $4a_1 = 3(4 - a_1)$ より $a_1 = \dfrac{12}{7}$ である.
同様に考えると三角形 $\mathrm{AB_0C_0}$ と三角形 $\mathrm{AB_nC_n}$ は相似なので

$$\mathrm{AB_0} : \mathrm{AB_n} = \mathrm{B_0C_0} : \mathrm{B_nC_n}$$

ここから $\mathrm{AB_n} = \dfrac{\mathrm{AB_0}}{\mathrm{B_0C_0}} \times \mathrm{B_nC_n} = \dfrac{4}{3}a_n$ を得る. また, $\mathrm{B_nB_{n+1}} = \mathrm{AB_n} - \mathrm{AB_{n+1}}$ であるから

$$a_{n+1} = \frac{4}{3}a_n - \frac{4}{3}a_{n+1}$$

である. これを整理すると $\dfrac{7}{3}a_{n+1} = \dfrac{4}{3}a_n$ であるから

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathbf{\frac{4}{7}}$$

を得る. よって正方形の一辺の長さを表す数列 $\{a_n\}$ は初項 $\dfrac{12}{7}$, 公比 $\dfrac{4}{7}$ の等比数列である. よって, その一般項は

$$a_n = \frac{12 \cdot 4^{n-1}}{7^n} = \frac{3 \cdot 4^n}{7^n}$$

であり, 面積 $S_n$ は

$$S_n = a_n^2 = \frac{9 \cdot 4^{2n}}{7^{2n}}$$

となる. $n$ 番目の正方形までの面積の部分和を $T_n$ とすると

$$\begin{aligned}
T_n &= S_1 + S_2 + \cdots + S_n \\
&= \frac{9\cdot 4^2}{7^2} + \frac{9\cdot 4^4}{7^4} + \cdots + \frac{9\cdot 4^{2n}}{7^{2n}} \\
&= \frac{144}{49}\left(1 + \frac{16}{49} + \left(\frac{16}{49}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{16}{49}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{144}{49}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{16}{49}\right)^n}{1-\dfrac{16}{49}} = \frac{48}{11}\left(1-\left(\frac{16}{49}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

よって求める級数は

$$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots = \lim_{m\to\infty} T_n = \mathbf{\frac{48}{11}}$$

**【答】** $\boldsymbol{\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{4}{7}}$, **級数の和は** $\boldsymbol{\dfrac{48}{11}}$.