［コース ID：53］　微分積分 III

53.3　広義積分

53.3.1　広義積分

問題 001（バリエーション No.6）

$\displaystyle\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である.

$x^{-\frac{1}{3}}$ は区間 $(0,\ 1]$ で連続であるから,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\,dx &= \lim_{\epsilon\to+0}\int_\epsilon^1 x^{-\frac{1}{3}}\,dx \\ &= \lim_{\epsilon\to+0}\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_\epsilon^1 \\ &= \lim_{\epsilon\to+0}\frac{3}{2}(1-\epsilon^{\frac{2}{3}}) = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

問題 002（バリエーション No.1）

$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \boxed{\text{ア}}$ である.

x^{-x} は区間 $[\,0,\ \infty)$ で連続であるから

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}\,dx &= \lim_{\delta\to\infty}\int_0^\delta e^{-x}\,dx \\ &= \lim_{\delta\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^\delta \\ &= \lim_{\delta\to\infty}\left(1-\frac{1}{e^\delta}\right) = 1\end{aligned}$$

【答】　$\mathbf{1}$

問題 002（バリエーション No.17）

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^9}\,dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である.

$\dfrac{1}{x^9}$ は区間 $[\,1,\ \infty)$ で連続であるから

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^9}\,dx &= \lim_{\delta\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{1}{x^9}\,dx\\ &= \lim_{\delta\to\infty}\left[-\frac{1}{8x^8}\right]_0^{\delta}\\ &= \lim_{\delta\to\infty}\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{\delta^8}\right)=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$

問題 003（バリエーション No.2）

$\displaystyle\int_0^4\frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx=$ $\boxed{ア}$ である．

$\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ は区間 $[\,0,\ 4)$ で連続であるから

$$\begin{aligned}\int_0^4\frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx &= \lim_{\delta\to 4}\int_0^{\delta}\frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx\\ &= \lim_{\delta\to 4}\left[-2\sqrt{4-x}\,\right]_0^{\delta}\\ &= \lim_{\delta\to 4}\left(4-2\sqrt{4-\delta}\right)=4\end{aligned}$$

【答】 $\mathbf{4}$

問題 003（バリエーション No.18）

$\displaystyle\int_{-5}^0\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\pi$ である．

$\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ は区間 $(-5,\ 0]$ で連続であるから

$$\int_{-5}^0\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx=\lim_{\delta\to -5}\int_{\delta}^0\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$$

$x=5\sin t$ と置くと，$\dfrac{dx}{dt}=5\cos t$ であり，x が δ から 0 の範囲を動く時，t は θ から 0 の範囲を動く．ただし，ここで θ は $5\sin\theta=\delta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq 0\right)$ を満たす値である．よって

$$\begin{aligned}\int_{\delta}^0\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx &= \int_{\theta}^0\frac{1}{\sqrt{25(1-\sin^2 t)}}\cdot 5\cos t\,dt\\ &= \int_{\theta}^0 dt=-\theta\end{aligned}$$

$\delta \to -5$ のとき, $\sin\theta \to -1$ であるから $\theta \to -\dfrac{\pi}{2}$ である．以上から

$$\begin{aligned}\int_{-5}^{0} \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx &= \lim_{\delta\to -5}\int_{\delta}^{0} \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx \\ &= \lim_{\theta\to -\frac{\pi}{2}} -\theta = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\pi}$

問題 004（バリエーション No.14）

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+25}\,dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$ である．

まず最初に $\dfrac{1}{x^2+25}$ の不定積分を求めておこう．

$x = 5\tan t \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と置くと, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{5}{\cos^2 t}$ であるから

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+25}\,dx &= \int \frac{1}{25(1+\tan^2 t)}\cdot\frac{5}{\cos^2 t}\,dt \\ &= \frac{1}{5}\int dt = \frac{1}{5}\,t\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{x^2+25}$ は $(-\infty,\ \infty)$ で連続であるから

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+25}\,dx &= \lim_{\epsilon\to-\infty}\lim_{\delta\to\infty}\int_{\epsilon}^{\delta} \frac{1}{x^2+25}\,dx \\ &= \lim_{\epsilon\to-\infty}\lim_{\delta\to\infty}\left[\frac{1}{5}\,t\right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \lim_{\epsilon\to-\infty}\lim_{\delta\to\infty}\frac{1}{5}(\beta-\alpha)\end{aligned}$$

ここで $\alpha,\ \beta$ はそれぞれ $\epsilon = 5\tan\alpha$, $\delta = 5\tan\beta$ を満たす値である．

$\epsilon \to -\infty$ のとき $\alpha \to -\dfrac{\pi}{2}$ でありまた, $\delta \to \infty$ のとき $\beta \to \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+25}\,dx = \lim_{\epsilon\to-\infty}\lim_{\delta\to\infty}\frac{1}{5}(\beta-\alpha) = \frac{\pi}{5}$$

【答】　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{5}}$

問題 005（バリエーション No.20）

$\displaystyle\int_{0}^{\infty} x^3 e^{-4x^4}\,dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である．

$x^3e^{-4x^4}$ は実数全体で連続であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^3e^{-4x^4}\,dx &= \lim_{\delta\to\infty}\int_0^{\delta} x^3e^{-4x^4}\,dx \\ &= \lim_{\delta\to\infty}\left[-\frac{1}{16}e^{-4x^4}\right]_0^{\delta} \\ &= \lim_{\delta\to\infty}\frac{1}{16}\left(1-e^{-4\delta^4}\right) = \frac{1}{16}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{1}{16}}$

問題 006（バリエーション No.25）

$\displaystyle\int_0^1 x^4\log x^5\,dx = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である．

まず $x^4\log x^5$ の不定積分を求めよう．

$$\begin{aligned}\int x^4\log x^5\,dx &= 5\int x^4\log x\,dx \\ &= 5\left(\frac{1}{5}x^5\log x - \int\frac{1}{5}\cdot x^5\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) \\ &= x^5\log x - \frac{1}{5}x^5\end{aligned}$$

$x^4\log x^5$ は区間 $(0,\ 1]$ で連続であるから

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^4\log x^5\,dx &= \lim_{\epsilon\to0}\int_{\epsilon}^1 x^4\log x^5\,dx \\ &= \lim_{\epsilon\to0}\left[x^5\log x - \frac{1}{5}x^5\right]_{\epsilon}^1 \\ &= -\frac{1}{5} - \left(\epsilon^5\log\epsilon - \frac{1}{5}\,\epsilon^5\right)\end{aligned}$$

ここで $\epsilon\to0$ のとき $\dfrac{1}{5}\,\epsilon^5\to0$ であり，

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to0}(\epsilon^5\log\epsilon) &= \lim_{\epsilon\to0}\frac{\log\epsilon}{\epsilon^{-5}} \\ &= \lim_{\epsilon\to0}\frac{\epsilon^{-1}}{-5\epsilon^{-6}} \\ &= \lim_{\epsilon\to0}-\frac{1}{5}\,\epsilon^5 = 0\end{aligned}$$

であるから

$$\int_0^1 x^4\log x^5\,dx = -\frac{1}{5}$$

【答】 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{5}}$

53.3.2　変化率と積分

問題 001（バリエーション No.2）

数直線上を原点から出発して t 秒後の速度 v が $v=t^3$ で表されるような運動をする点 P がある.
原点を出発してから 2 秒後の点 P の位置は $\boxed{\text{ア}}$ であり, このときの点 P の加速度は $\boxed{\text{イウ}}$ である.

t 秒後の速度 v が $v=t^3$ なので 2 秒後の位置 x は

$$x=\int_0^2 t^3\,dt=\frac{2^4}{4}=4$$

また, 加速度は速度を微分すれば得られるので,

$$\frac{dv}{dt}=3t^2$$

より 2 秒後の加速度は $3\times 2^2=12$ である.

【答】　2 秒後の位置は 4, 加速度は 12.

問題 002（バリエーション No.1）

放物線 $y=x^2\ (0\leqq x\leqq 2)$ を y 軸のまわりに 1 回転させてできる形状の容器があり, 時刻 $t=0$ に空の状態からこの容器への注水を開始した.
時刻 t における水面の高さを h, 容器内の水の体積を V とすると, V の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt}=\sqrt{h}\pi$ と表されるという. このとき,

水面の高さが 2 のときの, 水面の上昇する速度は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である.

また, 容器を満水にするまでに要する時間は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である.

時刻 t における水面の高さを h とすると, $0\leqq x\leqq 2$ より $0\leqq h\leqq 2^2=4$ である.
また $x=\sqrt{y}$ であるから, 回転体の体積の計算より時刻 t における容器内の水の体積 V は

$$V=\int_0^h \pi x^2\,dy=\pi\int_0^h y\,dy=\frac{1}{2}\pi h^2$$

h も t の関数であることに注意して, 上の式を t で微分すると $\dfrac{dV}{dt}=\pi h\dfrac{dh}{dt}$. よって仮定から

$$\frac{dV}{dt}=\pi h\frac{dh}{dt}=\sqrt{h}\pi$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{\sqrt{h}}$$

を得る. 水面の上昇する速度 v とは水面の高さの変化率であるから $v=\dfrac{dh}{dt}$ である. よって高さ $h=2$ のときの水面が上昇する速度は

$$v=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

また, $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ から両辺に $\sqrt{h}$ をかけて t で積分すると

$$\int \sqrt{h} \cdot \frac{dh}{dt}\, dt = \int dt$$

$$\int \sqrt{h}\, dh = t$$

$$\frac{2}{3} h\sqrt{h} = t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

時刻 $t = 0$ のとき, 容器は空なので $h = 0$ であるから代入すると $C = 0$ となる. よって $t = \dfrac{2}{3}h\sqrt{h}$.
容器が満水の時, h は最大値 4 であるから代入すれば

$$t = \frac{2}{3} 4\sqrt{4} = \frac{16}{3}$$

【答】　水面の上昇する速度は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$, 満水にするまでに要する時間は $\boldsymbol{\dfrac{16}{3}}$

問題 003（バリエーション No.1）

x 軸上を動く点 P が時刻 $t = 0$ において原点にある.
P の時刻 t における速度 v が $v = \sin \pi t$ と表されるとき,
$t = 1$ における P の座標は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\pi}$ であり,
$t = 0$ から $t = 3$ までに P が移動した軌跡の長さは $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\pi}$ である.

点 P の時刻 t における位置を x とすると時刻 $t = 0$ で原点にあるので

$$x = \int_0^t v\, dt' = \int_0^t \sin \pi t'\, dt' = \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t' \right]_0^t = \frac{1}{\pi}\,(1 - \cos \pi t)$$

よって $t = 1$ における P の座標は $x = \dfrac{1}{\pi}(1 - \cos \pi) = \dfrac{2}{\pi}$ である.
また, $t = 0$ から $t = 3$ までに P が移動した軌跡の長さ l は 直線 $t = 0,\ t = 3$ と曲線 $v = \sin \pi t$ と t 軸で囲まれた図形の面積に等しい. すなわち, 軌跡の長さは

$$l = \int_0^3 |v|\, dt$$

で与えられるので

$$\begin{aligned} l &= \int_0^3 |\sin \pi t|\ dt \\ &= \int_0^1 \sin \pi t\, dt - \int_1^2 \sin \pi t\, dt + \int_2^3 \sin \pi t\, dt \\ &= \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_0^1 - \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_1^2 + \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_2^3 \\ &= \frac{3}{\pi}(1 + 1) = \frac{6}{\pi} \end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{t = 1}$ における P の座標は $\boldsymbol{\dfrac{2}{\pi}}$, P が移動した軌跡の長さは $\boldsymbol{\dfrac{6}{\pi}}$.

問題 001（バリエーション No.31）

ある種の細菌を培養すると, 時間に対するその量の割合 (増殖の速さ) は, その時間における細菌の数に比例するという．培養を開始してから 1 時間後に細菌の数が最初の 5 倍になったとすると, 3 時間後には $\boxed{\text{アイウ}}$ 倍になる.
また, 3 時間後の細菌の数が 50000 個であったとすると, 培養開始時の細菌の数は $\boxed{\text{エオカ}}$ 個である.

t 時間後の細菌の数を x とおく．増殖の速さが細菌の数に比例することから比例定数を c として

$$\frac{dx}{dt} = cx$$

と表せる．培養開始時 $(t = 0)$ における細菌の数を x_0 として, 上の式を x で割ってから 0 から t まで積分すると

$$\int_0^t \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt'}\, dt' = \int_0^t c\, dt'$$

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{x'}\, dx' = c \int_0^t dt'$$

$$\log x - \log x_0 = ct$$

$$\frac{x}{x_0} = e^{ct}$$

よって $x = x_0 e^{ct}$ が成り立つ．1 時間後に細菌の数が 5 倍になったことから

$$x_0 e^c = 5x_0$$

$e^c = 5$ より $x = x_0(e^c)^t = x_0 5^t$ である.
3 時間後には $x = x_0 5^3 = 125x_0$ となるので, 培養開始時の **125** 倍になる．また, 3 時間後の細菌の数が 50000 個であるならば $125x_0 = 50000$ より $\boldsymbol{x_0 = 400}$ となる.

【答】　3 時間後には 125 倍, 培養開始時の細菌の数は 400 個