［コース ID：53］　微分積分 III

53.11　高次偏導関数

53.11.1　高次偏導関数

問題 001（バリエーション No.40）

関数 $f(x,y)=2x^3+8x^2y^2+8xy+2y^3$ において, 次のそれぞれの偏微分係数の値を求めると,

$f_{yx}(1,1)=$ $\boxed{\text{アイ}}$

$f_{yy}(1,1)=$ $\boxed{\text{ウエ}}$

となる.

$f(x,y)$ を y で偏微分すると

$$f_y(x,y)=16x^2y+8x+6y^2$$

よって第 2 次偏導関数は

$$f_{yx}(x,y)=32xy+8$$

$$f_{yy}(x,y)=16x^2+12y$$

となる. x ,y にそれぞれ 1 を代入すると

$$f_{yx}(1,1)=32+8=40$$

$$f_{yy}(1,1)=16+12=28$$

となる.

【答】　$\boldsymbol{f_{yx}(1,1)=40,\ f_{yy}(1,1)=28.}$

問題 002（バリエーション No.4）

関数 $f(x,y)=\sqrt{3x^2+5y^2}$ において, 次のそれぞれの偏微分係数の値を求めると,

$$f_{xx}(1,1)=\frac{\boxed{\text{アイ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エオ}}}$$

$$f_{xy}(1,1)=\frac{\boxed{\text{カキク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コサ}}}$$

となる.

関数 $f(x,y)$ を x で偏微分すると

$$f_x(x,y)=\frac{6x}{2\sqrt{3x^2+5y^2}}=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+5y^2}}=3x(3x^2+5y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

よって第 2 次偏導関数は

$$\begin{aligned}f_{xx}(x,y)&=3(3x^2+5y^2)^{-\frac{1}{2}}-\frac{3x}{2}(3x^2+5y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 6x\\&=\frac{3(3x^2+5y^2)-9x^2}{(3x^2+5y^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{15y^2}{(3x^2+5y^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

$$f_{xy}(x,y) = -\frac{30xy}{2(3x^2+5y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{15xy}{(3x^2+5y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

それぞれ $x=y=1$ を代入すると

$$f_{xx}(1,1) = \frac{15}{8\sqrt{8}} = \frac{15\sqrt{2}}{32}$$

$$f_{xy}(1,1) = -\frac{15}{8\sqrt{8}} = -\frac{15\sqrt{2}}{32}$$

【答】 $\boldsymbol{f_{xx}(1,1) = \frac{15\sqrt{2}}{32},\ f_{xy}(1,1) = \frac{-15\sqrt{2}}{32}.}$

問題 003（バリエーション No.4）

関数 $f(x,y) = \sin 3x \cos 5y$ において, 次のそれぞれの偏微分係数の値を求めると,

$f_{xx}\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

$f_{xy}\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\boxed{ウエオ}}{\boxed{カ}}$

となる.

関数 $f(x,y)$ を x で偏微分すると

$$f_x(x,y) = 3\cos 3x \cos 5y$$

となるので, 第 2 次偏導関数は

$$f_{xx}(x,y) = -9\sin 3x \cos 5y$$

$$f_{xy}(x,y) = -15\cos 3x \sin 5y$$

$x = y = \dfrac{\pi}{4}$ を代入すれば

$$f_{xx}\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right) = -9\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{9}{2}$$

$$f_{xy}\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right) = -15\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{15}{2}$$

となる.

【答】 $\boldsymbol{f_{xx}\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{2},\ f_{xy}\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-15}{2}.}$

問題 003（バリエーション No.40）

関数 $f(x,y) = \sin 2x \tan 5y$ において, 次のそれぞれの偏微分係数の値を求めると,

$f_{yx}\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right) = \boxed{アイ}$

$f_{yy}\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right) = \boxed{ウエオカ}$

となる.

関数 $f(x,y)$ を y で偏微分すると

$$f_y(x,y) = \sin 2x\cdot\frac{5}{\cos^2 5y} = \frac{5\sin 2x}{\cos^2 5y}$$

よって第 2 次偏導関数は

$$f_{yx}(x,y)=\frac{10\cos 2x}{\cos^2 5y}$$

$$f_{yy}(x,y)=5\sin 2x\cdot\left(-\frac{2\cos 5y(-\sin 5y)\cdot 5}{\cos^4 5y}\right)=\frac{50\sin 2x\sin 5y}{\cos^3 5y}$$

となる. $x=\frac{\pi}{6}$, $y=\frac{\pi}{3}$ をそれぞれ代入すると

$$f_{yx}\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right)=\frac{10\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=20$$

$$f_{yy}\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right)=\frac{50\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=-50\cdot 3\cdot 2=-300$$

【答】 $\boldsymbol{f_{yx}\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right)=20,\ f_{yy}\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right)=-300}$

問題 004（バリエーション No.10）

関数 $f(x,y)=\dfrac{4x^2+6y^2}{xy}$ において, 次のそれぞれの偏微分係数の値を求めると,

$f_{xx}(1,1)=$ **アイ**

$f_{xy}(1,1)=$ **ウエオ**

$f(x,y)=\dfrac{4x}{y}+\dfrac{6y}{x}$ であることに注意する. 関数 $f(x,y)$ を x で偏微分すると

$$f_x(x,y)=\frac{4}{y}-\frac{6y}{x^2}$$

よって第 2 次偏導関数は

$$f_{xx}(x,y)=\frac{12y}{x^3}$$

$$f_{xy}(x,y)=-\frac{4}{y^2}-\frac{6}{x^2}$$

$x=y=1$ をそれぞれ代入すると

$$f_{xx}(1,1)=12$$

$$f_{xy}(1,1)=-4-6=-10$$

となる.

【答】 $\boldsymbol{f_{xy}(1,1)=12,\ f_{xy}(1,1)=-10.}$