［コース ID：55］　微分方程式

55.5　1 階線形微分方程式

55.5.1　1 階線形微分方程式

問題 001（バリエーション No.10）

次の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + 6xy = x$$

の一般解として正しいものを, 次の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.
(ただし, C は任意定数とする)

0 $y = Ce^{-2x^2} + \frac{1}{4}$
1 $y = Ce^{-\frac{3}{2}x^2} + \frac{1}{3}$
2 $y = Ce^{-3x^2} + \frac{1}{6}$
3 $y = Ce^{-\frac{5}{2}x^2} + \frac{1}{5}$
4 $y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} + 2$
5 $y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} + 3$
6 $y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} + 4$
7 $y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} + 5$

まず初めに

$$\frac{dy}{dx} + 6xy = 0$$

の解を求める. 式変形すると

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -6x$$

となるので, 両辺を x で積分して整理すると

$$\log|y| = -3x^2 + C$$

$$y = Ce^{-3x^2}$$

となる. ここで, C は任意定数である.
C が x の関数であるとして, もとの微分方程式の解を求めよう.

$$y = C(x)e^{-3x^2}$$

とすると,

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)e^{-3x^2} - 6xC(x)e^{-3x^2}$$

もとの微分方程式に代入すると

$$\left(C'(x)e^{-3x^2} - 6xC(x)e^{-3x^2}\right) + 6xC(x)e^{-3x^2} = x$$

$$C'(x)e^{-3x^2} = x$$

よって $C'(x) = xe^{3x^2}$ を得る. x で積分すれば

$$C(x) = \frac{1}{6}e^{3x^2} + C_1$$

であることが分かる. ここで C_1 は新たな積分定数である. $C(x)$ を代入すれば

$$y = \left(\frac{1}{6}e^{3x^2} + C_1\right)e^{-3x^2} = C_1 e^{-3x^2} + \frac{1}{6}$$

C_1 を C と置き直せば, $y = Ce^{-3x^2} + \dfrac{1}{6}$ となる.

(別解)

微分方程式を整理すると $\dfrac{dy}{dx} = x(1-6y)$ より, この微分方程式は変数分離形である.

$$\frac{1}{1-6y} \cdot \frac{dy}{dx} = x$$

となるので, 積分して整理すると

$$\log|1-6y| = -3x^2 + C$$

e^C を新たに C とすれば

$$1 - 6y = \pm Ce^{-3x^2}$$

$$y = Ce^{-3x^2} + \frac{1}{6} \quad (C \neq 0)$$

ここで $y = \dfrac{1}{6}$ もこの微分方程式の解であるから, 一般解は $y = Ce^{-3x^2} + \dfrac{1}{6}$ となる.

【答】　②

問題 002（バリエーション No.40）

次の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + 5x^3 y = 4x^3$$

の一般解として正しいものを, 次の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.
(ただし, C は任意定数とする)

⓪ $y = Ce^{-\frac{3}{4}x^4} + \dfrac{3}{4}$
① $y = Ce^{-\frac{1}{2}x^4} + 2$
② $y = Ce^{-\frac{1}{4}x^4} + 4$
③ $y = Ce^{-\frac{5}{4}x^4} + \dfrac{3}{5}$
④ $y = Ce^{-\frac{3}{4}x^4} + 1$
⑤ $y = Ce^{-\frac{1}{2}x^4} + \dfrac{3}{2}$
⑥ $y = Ce^{-\frac{1}{4}x^4} + 3$
⑦ $y = Ce^{-\frac{5}{4}x^4} + \dfrac{4}{5}$

まず, $\dfrac{dy}{dx} + 5x^3 y = 0$ の一般解を求める.

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -5x^3$$

より積分して整理すると

$$\log|y| = -\frac{5}{4}x^4 + C$$

$$y = Ce^{-\frac{5}{4}x^4}$$

C が x の関数であるとして, もとの微分方程式の解を求めよう.

$$y = C(x)e^{-\frac{5}{4}x^4}$$

とすると $\dfrac{dy}{dx} = C'(x)e^{-\frac{5}{4}x^4} - 5x^3C(x)e^{-\frac{5}{4}x^4}$ であるから, もとの微分方程式に代入すると

$$\left(C'(x)e^{-\frac{5}{4}x^4} - 5x^3C(x)e^{-\frac{5}{4}x^4}\right) + 5x^3C(x)e^{-\frac{5}{4}x^4} = 4x^3$$

$$C'(x) = 4x^3e^{\frac{5}{4}x^4}$$

ここから $C(x) = \dfrac{4}{5}e^{\frac{5}{4}x^4} + C_1$ を得るので, y に代入すれば $y = C_1e^{-\frac{5}{4}x^4} + \dfrac{4}{5}$ となる.

【答】　⑦

問題 003（バリエーション No.40）

次の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{5y}{x} = 4x^2$$

の一般解として正しいものを, 次の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.
(ただし, C は任意定数とする)

⓪ $y = \dfrac{3x^3}{5} + \dfrac{C}{x^2}$

① $y = \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{C}{x^3}$

② $y = \dfrac{3x^3}{7} + \dfrac{C}{x^4}$

③ $y = \dfrac{3x^3}{8} + \dfrac{C}{x^5}$

④ $y = \dfrac{4x^3}{5} + \dfrac{C}{x^2}$

⑤ $y = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{C}{x^3}$

⑥ $y = \dfrac{4x^3}{7} + \dfrac{C}{x^4}$

⑦ $y = \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{C}{x^5}$

まず, $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{5y}{x} = 0$ の一般解を求める.

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{x}$$

であるから積分すると

$$\log|y| = -5\log|x| + C$$

整理して e^C を新しく C と置き直せば

$$x^5y = C \quad (C \neq 0)$$

$y=0$ も解であるので $y=\dfrac{C}{x^5}$ となる．
C が x の関数であるとして，もとの微分方程式の一般解を求めよう．

$$y=C(x)x^{-5}$$

とすると $\dfrac{dy}{dx}=C'(x)x^{-5}-5C(x)x^{-6}$ となるので，微分方程式に代入すると

$$\left(C'(x)x^{-5}-5C(x)x^{-6}\right)+\frac{5}{x}\cdot\frac{C(x)}{x^5}=4x^2$$

$$C'(x)=4x^7$$

よって $C(x)=\dfrac{1}{2}x^8+C_1$ (C_1は積分定数) を得る．C_1 を C と置き直し，y に代入すれば

$$y=\frac{C}{x^5}+\frac{x^3}{2}$$

【答】　⑦

問題 004（バリエーション No.20）

次の微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+4y=5x$$

の一般解として正しいものを，次の中から選び，その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ．
(ただし，C は任意定数とする)

⓪ $y=Ce^{-4x}+\dfrac{3x}{2}-\dfrac{3}{8}$
① $y=Ce^{-4x}+\dfrac{5x}{4}-\dfrac{5}{16}$
② $y=Ce^{-4x}+x-\dfrac{1}{4}$
③ $y=Ce^{-4x}+\dfrac{3x}{4}-\dfrac{3}{16}$
④ $y=Ce^{-3x}+\dfrac{5x}{3}-\dfrac{5}{9}$
⑤ $y=Ce^{-3x}+\dfrac{4x}{3}-\dfrac{4}{9}$
⑥ $y=Ce^{-3x}+x-\dfrac{1}{3}$
⑦ $y=Ce^{-3x}+\dfrac{2x}{3}-\dfrac{2}{9}$

まず，$\dfrac{dy}{dx}+4y=0$ の一般解をもとめる．$\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=-4$ であるから

$$\log|y|=-4x+C$$

$y=0$ も解なので

$$y=Ce^{-4x}$$

$C(x)$ を x の関数として，もとの微分方程式の一般解を求める．

$$y=C(x)e^{-4x}$$

とすると $\dfrac{dy}{dx} = C'(x)e^{-4x} - 4C(x)e^{-4x}$ となるので, もとの微分方程式に代入すると

$$\left(C'(x)e^{-4x} - 4C(x)e^{-4x}\right) + 4C(x)e^{-4x} = 5x$$

$$C'(x) = 5xe^{4x}$$

ここで部分積分により

$$\begin{aligned}\int 5xe^{4x}\,dx &= \frac{5}{4}xe^{4x} - \frac{5}{4}\int e^{4x}\,dx \\ &= \frac{5}{4}xe^{4x} - \frac{5}{16}e^{4x} + C\end{aligned}$$

よって, $C(x) = \dfrac{5}{4}xe^{4x} - \dfrac{5}{16}e^{4x} + C$ である. y に代入すれば

$$y = Ce^{-4x} + \frac{5x}{4} - \frac{5}{16}$$

【答】　①