［コース ID：55］　微分方程式

55.9　いろいろな線形微分方程式

55.9.1　いろいろな線形微分方程式

問題 001（バリエーション No.1）

t に関する 2 つの未知関数 $x(t),\ y(t)$ について, 次の連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+10x+9y &= 0 \\ \dfrac{dy}{dt}-x &= 0 \end{cases}$$

の一般解は

$x=-C_1e^{\boxed{\text{ア}}\,t}+\boxed{\text{イ}}\,C_2e^{\boxed{\text{ウエ}}\,t}$

$y=C_1e^{\boxed{\text{ア}}\,t}-C_2e^{\boxed{\text{ウエ}}\,t}$

(ただし, C_1, C_2 は任意定数) である.

第 2 式より, $x=\dfrac{dy}{dt}$ であるから第 1 式に代入すると

$$\frac{d^2y}{dt^2}+10\frac{dy}{dt}+9y=0$$

特性方程式 $\lambda^2+10\lambda+9=0$ を解くと, $\lambda=-9,-1$ より一般解は

$$y=C_1e^{-t}+C_2e^{-9t}$$

$x=\dfrac{dy}{dt}$ より

$$x=-C_1e^{-t}-9C_2e^{-9t}$$

C_2 を $-C_2$ で置き直せば

$$\boldsymbol{x=-C_1e^{-t}+9C_2e^{-9t}}$$

$$\boldsymbol{y=C_1e^{-t}-C_2e^{-9t}}$$

(注意) 解答に合わせて C_2 を $-C_2$ に置き直したが, C_2 は任意定数なので置き換える必要性は無い.
ただし, 連立方程式であるので, x と y に現れる $C_1,\ C_2$ の符号は整合性を保たなければいけない.
言い換えると, 例えば $y=C_1e^{-t}+C_2e^{-9t}$ から, $x=\dfrac{dy}{dt}=-C_1e^{-t}-9C_2e^{-9t}$ となるが C_1, C_2 は任意なので

$$x=C_1e^{-t}+9C_2e^{-9t}$$

$$y=C_1e^{-t}+C_2e^{-9t}$$

などとはしてはいけない.

問題 002（バリエーション No.1）

t に関する 2 つの未知関数 $x(t)$, $y(t)$ について, 次の連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x - 2y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

の一般解は

$x = C_1e^t - \boxed{\text{ア}}\ C_2e^{\boxed{\text{イウ}}\ t}$

$y = \boxed{\text{エ}}\ C_1e^t - C_2e^{\boxed{\text{イウ}}\ t}$

(ただし, C_1, C_2 は任意定数) である.

第 2 式から $x = y - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{dy}{dt}$ であるので, 第 1 式に代入すると

$$\left(\frac{dy}{dt} - \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right) + 3\left(y - \frac{1}{2}\cdot\frac{dy}{dt}\right) - 2y = 0$$

2 倍して整理すると

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 0$$

特性方程式 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ を解くと, $\lambda = -2, 1$ を得る．よって y の一般解は

$$y = C_1e^t + C_2e^{-2t}$$

$x = y - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{dy}{dx}$ より

$$\begin{aligned} x &= C_1e^t + C_2e^{-2t} - \frac{1}{2}\left(C_1e^t - 2C_2e^{-2t}\right) \\ &= \frac{1}{2}C_1e^t + 2C_2e^{-2t} \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{2}C_1$ を新たに C_1, $-C_2$ を新たに C_2 と置き直すと

$$\boldsymbol{x = C_1e^t - 2C_2e^{-2t}}$$

$$\boldsymbol{y = 2C_1e^t - C_2e^{-2t}}$$

(注意) こちらも当然任意定数を改めて置き直す必要はない．解答に沿う形に直しているだけである.

問題 003（バリエーション No.1）

t に関する 2 つの未知関数 $x(t)$, $y(t)$ について, 次の連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x - 2y - 2t = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

の一般解は

$x = C_1e^t - \boxed{\text{ア}}\ C_2e^{\boxed{\text{イウ}}\ t} + \boxed{\text{エ}}\ t$

$y = \boxed{\text{オ}}\ C_1e^t - C_2e^{\boxed{\text{イウ}}\ t} + \boxed{\text{カ}}\ t + \boxed{\text{キ}}$

(ただし, C_1, C_2 は任意定数) である.

第 2 式から $x = y - \frac{1}{2} \cdot \frac{dy}{dt}$ であるので, 第 1 式に代入すると

$$\left(\frac{dy}{dt} - \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}\right) + 3\left(y - \frac{1}{2} \cdot \frac{dy}{dt}\right) - 2y - 2t = 0$$

2 倍して整理すると

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = -4t \quad \cdots (\mathrm{A})$$

特性方程式 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ を解くと, $\lambda = -2, 1$ を得る.
また, $y = at + b$ として上の方程式に代入すると, $y' = a, \quad y'' = 0$ より

$$a - 2(at + b) = -4t$$

整理すると $(2a - 4)t - (a - 2b) = 0$.

$$\begin{cases} 2a - 4 = 0 \\ a - 2b = 0 \end{cases}$$

を解くと, $a = 2, \ b = 1$ となるので $y = 2t + 1$ は微分方程式 (A) の解である.. よって y の一般解は

$$y = C_1e^t + C_2e^{-2t} + 2t + 1$$

$x = y - \frac{1}{2} \cdot \frac{dy}{dt}$ より

$$\begin{aligned} x &= \left(C_1e^t + C_2e^{-2t} + 2t + 1\right) - \frac{1}{2}\left(C_1e^t - 2C_2e^{-2t} + 2\right) \\ &= \frac{1}{2}C_1e^t + 2C_2e^{-2t} + 2t \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}C_1$ を新たに C_1, $-C_2$ を新たに C_2 と置けば

$$\boldsymbol{x = C_1e^t - 2C_2e^{-2t} + 2t}$$

$$\boldsymbol{y = 2C_1e^t - C_2e^{-2t} + 2t + 1}$$

問題 004（バリエーション No.1）

以下の設問において, $\boxed{\text{ア}}$ については, 後に示す選択肢から適切なものを選び, その番号をマークせよ.
ただし, $\boxed{\text{ア}}$ に1をマークした場合は, $\boxed{\text{エ}}$ に対するすべての記号に0をマークせよ.

微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} - 5y = 0$$

の一般解は $\boxed{\text{ア}}$ の形の方程式 (C_1, C_2 は任意定数) で表され,
$a = \boxed{\text{イウ}}$, $b = \boxed{\text{エ}}$ である.

$\boxed{\text{ア}}$ の選択肢：

0 $y = C_1x^a + C_2x^b \ (a < b)$
1 $y = (C_1 + C_2\log|x|)x^a$
2 $y = x^a\left\{C_1\cos(b\log|x|) + C_2\sin(b\log|x|)\right\}$

解の形が $y = Cx^\alpha$ であると仮定して微分方程式に代入すると

$$C\alpha(\alpha-1)x^\alpha - 3C\alpha x^\alpha - 5Cx^\alpha = 0$$

$$(\alpha^2 - \alpha - 3\alpha - 5)Cx^\alpha = 0$$

$$(\alpha^2 - 4\alpha - 5)Cx^\alpha = 0$$

よって $\alpha^2 - 4\alpha - 5 = 0$ のとき, y はこの微分方程式の解である．$\alpha^2 - 4\alpha - 5 = (\alpha+1)(\alpha-5) = 0$ より $\alpha = -1, 5$. 以上から一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 x^{-1} + C_2 x^5}$$

【答】　一般解は 0 の形であり, $\boldsymbol{a = -1}$, $\boldsymbol{b = 5}$.

問題 004（バリエーション No.2）

以下の設問において, $\boxed{\text{ア}}$ については, 後に示す選択肢から適切なものを選び, その番号をマークせよ．
ただし, $\boxed{\text{ア}}$ に 1 をマークした場合は, $\boxed{\text{ウ}}$ に対するすべての記号に 0 をマークせよ．

微分方程式

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

の一般解は $\boxed{\text{ア}}$ の形の方程式 (C_1, C_2 は任意定数) で表され,
$a = \boxed{\text{イ}}$, $b = \boxed{\text{ウ}}$ である．

$\boxed{\text{ア}}$ の選択肢：

0 $y = C_1 x^a + C_2 x^b \ (a < b)$
1 $y = (C_1 + C_2 \log|x|)x^a$
2 $y = x^a \{C_1 \cos(b\log|x|) + C_2 \sin(b\log|x|)\}$

解の形が $y = Cx^\alpha$ であると仮定して微分方程式に代入すると

$$C\alpha(\alpha-1)x^\alpha - 3C\alpha x^\alpha + 4Cx^\alpha = 0$$

$$(\alpha^2 - \alpha - 3\alpha + 4)Cx^\alpha = 0$$

$$(\alpha^2 - 4\alpha + 4)Cx^\alpha = 0$$

よって $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$ のとき, y はこの微分方程式の解である．$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = (\alpha - 2)^2 = 0$ より $\alpha = 2$. よって $y = Cx^2$ (C は任意定数) はこの微分方程式の解である．
2 階の微分方程式であるので, もう 1 つの解を見つけたい．
ここで C を x の関数として $y = C(x)x^2$ を微分方程式に代入すると

$$y' = C'(x)x^2 + 2C(x)x, \quad y'' = C''(x)x^2 + 4C'(x)x + 2C(x)$$

より

$$x^2\left(C''(x)x^2 + 4C'(x)x + 2C(x)\right) - 3x\left(C'(x)x^2 + 2C(x)x\right) + 4C(x)x^2 = 0$$

$$C''(x)x^4 + C'(x)x^3 = 0$$

$$(C''(x)x + C'(x))\,x^3 = 0$$

よって $C(x)$ が微分方程式

$$C''(x)x + C'(x) = 0 \quad \cdots \text{(A)}$$

を満たしていれば, y はもとの微分方程式の解になる．(A) の左辺について

$$(C'(x)x)' = C''(x)x + C'(x)$$

であるから $(C'(x)x)' = 0$ である．$C'(x)x = C_1$ (C_1 は積分定数) であるから, 両辺を x で割って積分すると

$$C(x) = C_1 \log|x| + C_2 \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

となる．よって一般解は

$$\begin{aligned} y &= C(x)x^2 \\ &= (C_1 \log|x| + C_2)x^2 \end{aligned}$$

【答】　一般解の形は ① であり, $a = 2,\ b = 0$

問題 004（バリエーション No.12）

以下の設問において, $\boxed{\text{ア}}$ については, 後に示す選択肢から適切なものを選び, その番号をマークせよ．

ただし, $\boxed{\text{ア}}$ に①をマークした場合は, $\boxed{\text{ウ}}$ に対するすべての記号に⓪をマークせよ．

微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

の一般解は $\boxed{\text{ア}}$ の形の方程式 (C_1, C_2 は任意定数) で表され,

$a = \boxed{\text{イ}}$, $b = \boxed{\text{ウ}}$ である．

$\boxed{\text{ア}}$ の選択肢：

⓪ $y = C_1x^a + C_2x^b \ (a < b)$

① $y = (C_1 + C_2 \log|x|)x^a$

② $y = x^a \left\{C_1 \cos(b \log|x|) + C_2 \sin(b \log|x|)\right\}$

解の形が $y = Cx^\alpha$ であると仮定して微分方程式に代入すると

$$C\alpha(\alpha-1)x^\alpha - C\alpha x^\alpha + 5Cx^\alpha = 0$$

$$(\alpha^2 - \alpha - \alpha + 5)Cx^\alpha = 0$$

$$(\alpha^2 - 2\alpha + 5)Cx^\alpha = 0$$

よって $\alpha^2 - 2\alpha + 5 = 0$ のとき, y はこの微分方程式の解である．2 次方程式の解の公式より

$$\alpha = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm 2i$$

ここで $x^2 = e^{2\log|x|}$ であるから

$$x^{2i} = \left(e^{2\log|x|}\right)^i = e^{2i\log|x|} = \cos(2\log|x|) + i\sin(2\log|x|)$$

よって解は

$$
\begin{aligned}
y &= C_1x^{1+2i} + C_2x^{1-2i} = C_1x\left(\cos(2\log|x|) + i\sin(2\log|x|)\right) + C_2x\left(\cos(2\log|x|) - i\sin(2\log|x|)\right) \\
&= x\left\{(C_1+C_2)\cos(2\log|x|) + i(C_1-C_2)\sin(2\log|x|)\right\}
\end{aligned}
$$

ここで C_1+C_2 を新しく C_1, $i(C_1-C_2)$ を新しく C_2 と置き直せば

$$
y = x(C_1\cos(2\log|x|) + C_2\sin(2\log|x|) \quad (C_1, C_2\text{は任意定数})
$$

【答】　一般解は ② の形であり, $\boldsymbol{a=1}$, $\boldsymbol{b=2}$.