# ［コース ID：55］　微分方程式

## 55.6　2 階微分方程式

### 55.6.1　2 階微分方程式の解

### 55.6.2　線形微分方程式

**問題 001（バリエーション No.1）**

$y_1 = e^{\alpha x},\ y_2 = e^{\beta x}$ (ただし, $\alpha < \beta$) が, 微分方程式

$$y'' - 2y' - 8y = 0$$

の特殊解であるならば, $\alpha = \boxed{\text{アイ}}$, $\beta = \boxed{\text{ウ}}$ である.

このとき, $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \boxed{\text{エ}}\, e^{\boxed{\text{オ}}\, x} \neq 0$ となるので, $y_1,\ y_2$ はこの微分方程式の線形独立な解である.

従って, この微分方程式の一般解 $y$ は, 任意定数 $C_1,\ C_2$ を用いて

$y = C_1 e^{\boxed{\text{アイ}}\, x} + C_2 e^{\boxed{\text{ウ}}\, x}$ と表される.

$y = e^{\lambda x}$ とすると $y' = \lambda e^{\lambda x} = \lambda y$ より $y'' = \lambda^2 y$. よって

$$y'' - 2y' - 8y = (\lambda^2 - 2\lambda - 8)y = 0$$

$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$ より, $\lambda = -2, 4$ のとき, $y = e^{\lambda x}$ はこの微分方程式の解となる.
$\alpha < \beta$ であるから $\boldsymbol{\alpha = -2,\ \beta = 4}$.

$$y_1 = e^{-2x},\quad y_2 = e^{4x}$$

とすると

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{4x} \\ -2e^{-2x} & 4e^{4x} \end{vmatrix} \\ &= 4e^{-2x} \cdot e^{4x} - (-2)e^{-2x} \cdot e^{4x} \\ &= 6e^{2x} \end{aligned}$$

よって $W(y_1, y_2) = \boldsymbol{6e^{2}} \neq 0$ よりこれらの解は線形独立である.
従って一般解は

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} \quad (C_1, C_2\text{は任意定数})$$

と表される.

**問題 002（バリエーション No.1）**

$y_1 = e^x \cos \alpha x,\ y_2 = e^x \sin \alpha x$ (ただし, $\alpha > 0$) が, 微分方程式

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

の特殊解であるならば, $\alpha = \boxed{\text{ア}}$ である.

このとき, $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \boxed{\text{イ}}\, e^{2x} \neq 0$ となるので, $y_1,\ y_2$ はこの微分方程式の線形独立な解である.

従って, この微分方程式の一般解 $y$ は, 任意定数 $C_1,\ C_2$ を用いて

$y = C_1 e^x \cos \boxed{\text{ア}}\, x + C_2 e^x \sin \boxed{\text{イ}}\, x$ と表される.

$y = e^x \cos \alpha x$ とすると,

$$y' = e^x \cos \alpha x - \alpha e^x \sin \alpha x$$

$$y'' = e^x \cos \alpha x - 2\alpha e^x \sin \alpha x - \alpha^2 e^x \cos \alpha x$$

であるから

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 5y &= (e^x \cos \alpha x - 2\alpha e^x \sin \alpha x - \alpha^2 e^x \cos \alpha x) - 2(e^x \cos \alpha x - \alpha e^x \sin \alpha x) + 5e^x \cos \alpha x \\ &= (4 - \alpha^2) e^x \cos \alpha x \end{aligned}$$

よって $\alpha = \pm 2$ のとき, $y = e^x \cos \alpha x$ はこの微分方程式の解になる. $y = e^x \sin \alpha x$ についても同様に計算すれば同じ結果が得られる.

$\alpha > 0$ を仮定していたので, $\boldsymbol{\alpha = 2}$.

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} e^x \cos 2x & e^x \sin 2x \\ -2e^x \sin 2x & 2e^x \cos 2x \end{vmatrix} \\ &= 2e^{2x} \cos^2 2x - (-2) e^{2x} \sin^2 2x \\ &= 2e^{2x} (\cos^2 2x + \sin^2 2x) \\ &= 2e^{2x} \end{aligned}$$

$W(y_1, y_2) = \boldsymbol{2e^{2x}} \neq 0$ より, この微分方程式の一般解は

$$y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$$

**問題 002（バリエーション No.4）**

$y_1 = \cos \alpha x,\ y_2 = \sin \alpha x$ (ただし, $\alpha > 0$) が, 微分方程式

$$y'' + 9y = 0$$

の特殊解であるならば, $\alpha = \boxed{\text{ア}}$ である.

このとき, $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \boxed{\text{イ}} \neq 0$ となるので, $y_1,\ y_2$ はこの微分方程式の線形独立な解である.

従って, この微分方程式の一般解 $y$ は, 任意定数 $C_1,\ C_2$ を用いて

$y = C_1 \cos \boxed{\text{ア}}\, x + C_2 \sin \boxed{\text{イ}}\, x$ と表される.

$y = \cos\alpha x$ とすると $y'' = -\alpha^2\cos\alpha x$ なので

$$y'' + 9y = (-\alpha^2 + 9)\cos\alpha x$$

よって $\alpha = \pm 3$ のとき, $y = \cos\alpha x$ はこの微分方程式の解となる. $y = \sin\alpha x$ についても同様である.
$\alpha > 0$ を仮定していたので $\boldsymbol{\alpha = 3}$.

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3\sin 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} \\ &= 3\cos^2 3x - (-3)\sin^2 3x \\ &= 3(\cos^2 3x + \sin^2 3x) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$W(y_1, y_2) = \mathbf{3} \neq 0$ より, この微分方程式の一般解は

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$$

**問題 003（バリエーション No.4）**

$y_1 = e^{-2x},\ y_2 = e^{\alpha x}\ (\alpha \neq -2)$ が、微分方程式

$$y'' - 3y' - 10y = 0 \quad \cdots(\mathrm{A})$$

の解であるとき, $\alpha = \boxed{\text{ア}}$ である.
また, 次の微分方程式

$$y'' - 3y' - 10y = e^{-x} \quad \cdots(\mathrm{B})$$

の特殊解の 1 つが $y_0 = \beta e^{-x}$ であるならば, $\beta = \dfrac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ であり, 微分方程式 (B) の一般解は

$$y = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}e^{-x} + C_1 e^{\boxed{\text{クケ}}\,x} + C_2 e^{\boxed{\text{コ}}\,x}$$

(ただし, $C_1,\ C_2$ は任意定数) である.

$y = e^{\alpha x}$ とすると

$$y'' - 3y' - 10y = (\alpha^2 - 3\alpha - 10)e^{\alpha x}$$

$\alpha^2 - 3\alpha - 10 = (\alpha + 2)(\alpha - 5)$ より $\alpha = -2,\ 5$ のとき, $y = e^{\alpha x}$ は微分方程式 (A) の解となる.
$\alpha \neq -2$ より $\boldsymbol{\alpha = 5}$.
また $y_0 = \beta e^{-x}$ に対し, $y_0' = -\beta e^{-x},\ y_0'' = \beta e^{-x}$ である.

$$\beta e^{-x} - 3(-\beta e^{-x}) - 10\beta e^{-x} = e^{-x}$$

とすると, $-6\beta e^{-x} = e^{-x}$. よって $\boldsymbol{\beta = \dfrac{-1}{6}}$ のとき $y_0 = \beta e^{-x}$ は微分方程式 (B) の特殊解となる.
よって微分方程式 (B) の一般解は

$$\boldsymbol{y = \frac{-1}{6}e^{-x} + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{5x}}$$

**問題 004（バリエーション No.1）**

微分方程式

$$y'' + 3y = 0 \quad \cdots (\mathrm{A})$$

に対し, $y_1 = \sin \alpha x,\ y_2 = \cos \alpha x$ ($\alpha > 0$ がそれぞれ解であるとき, $\alpha = \sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ である.
また, 次の微分方程式

$$y'' + 3y = \cos x \quad \cdots (\mathrm{B})$$

の特殊解の 1 つが $y_0 = \beta \cos x$ であるならば, $\beta = \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり, 微分方程式 (B) の一般解は

$$y = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \cos x + C_1 \cos\left(\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\, x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\, x\right)$$

(ただし, $C_1,\ C_2$ は任意定数) である.

$y = \sin \alpha x$ とすると $y'' = -\alpha^2 \sin \alpha x$ であるから

$$y'' + 3y = (-\alpha^2 + 3) \sin \alpha x = 0$$

のとき $\alpha = \pm\sqrt{3}$. $\alpha > 0$ より, $\boldsymbol{\alpha = \sqrt{3}}$ である.
また, $y_0 = \beta \cos x$ に対し

$$y_0'' + y_0 = (-1 + 3)\beta \cos x = \cos x$$

とすると $2\beta = 1$ より $\beta = \dfrac{1}{2}$. よって $\boldsymbol{\beta = \dfrac{1}{2}}$ のとき $y_0 = \beta \cos x$ は微分方程式 (B) の特殊解となる.
以上から, 微分方程式 (B) の一般解は

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2} \cos x + C_1 \cos\left(\sqrt{3}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{3}x\right)}$$