［コース ID：55］　微分方程式

55.4　同次形

55.4.1　同次形

問題 001（バリエーション No.50）

次の微分方程式

$$\frac{x}{3}\frac{dy}{dx} = 2x + 5y$$

の一般解として正しいものを, 次の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.
(ただし, C は任意定数とする)

⓪ $y = Cx^3 - 3x$
① $y = Cx^3 - \dfrac{9x}{2}$
② $y = Cx^3 - 6x$
③ $y = Cx^3 - \dfrac{15x}{2}$
④ $y = Cx^3 - \dfrac{3x}{8}$
⑤ $y = Cx^3 - \dfrac{3x}{11}$
⑥ $y = Cx^3 - \dfrac{3x}{4}$
⑦ $y = Cx^3 - \dfrac{3x}{7}$

両辺を $\dfrac{x}{3}$ で割ると

$$\frac{dy}{dx} = 6 + 15 \cdot \frac{y}{x}$$

となるので, この微分方程式は同次形である. $u = \dfrac{y}{x}$ と置くと, $y = ux$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = \left(\frac{du}{dx}\right)x + u\left(\frac{dx}{dx}\right) = x \cdot \frac{du}{dx} + u$$

与えられた微分方程式に代入すると

$$x \cdot \frac{du}{dx} + u = 6 + 15u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{14u + 6}{x}$$

$$\frac{1}{7u + 3} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{2}{x}$$

両辺を x で積分すると

$$\frac{1}{7}\log|7u + 3| = 2\log|x| + C$$

$$\log\left|\frac{7u + 3}{x^{14}}\right| = C$$

e^C を C と置き直せば

$$7u + 3 = \pm Cx^{14}$$

ただし, $C>0$ である. $u=\dfrac{y}{x}$ であったから代入して整理すると

$$y=\pm Cx^{15}-\frac{3x}{7}\quad (C>0)$$

また, $y=-\dfrac{3x}{7}$ はこの微分方程式の解であるから, 一般解は

$$y=\pm Cx^{15}-\frac{3x}{7}\quad (C\text{ は任意定数})$$

【答】　⑦

問題 002（バリエーション No.40）

次の微分方程式

$$\frac{xy}{3}\frac{dy}{dx}=2x^2+5y^2\quad (x>0)$$

の一般解として正しいものを, 次の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.
(ただし, C は任意定数とする)

⓪ $\dfrac{y^2}{x^{18}}+\dfrac{3}{4x^{16}}=C$
① $\dfrac{y^2}{x^{30}}+\dfrac{3}{7x^{28}}=C$
② $\dfrac{y^2}{x^{24}}+\dfrac{3}{11x^{22}}=C$
③ $\dfrac{y^2}{x^{18}}+\dfrac{3}{8x^{16}}=C$
④ $\dfrac{y^2}{x^{6}}+\dfrac{15}{2x^{4}}=C$
⑤ $\dfrac{y^2}{x^{6}}+\dfrac{6}{x^{4}}=C$
⑥ $\dfrac{y^2}{x^{6}}+\dfrac{9}{2x^{4}}=C$
⑦ $\dfrac{y^2}{x^{6}}+\dfrac{3}{x^{4}}=C$

両辺を $\dfrac{xy}{3}$ で割ると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6x}{y}+\frac{15y}{x}=6\left(\frac{y}{x}\right)^{-1}+15\cdot\frac{y}{x}$$

となるので, この微分方程式は同次形である.
$u=\dfrac{y}{x}$ と置くと, $\dfrac{dy}{dx}=x\dfrac{du}{dx}+u$ であるから, 代入すると

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{6}{u}+15u$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{6}{u}+14u=\frac{2(7u^2+3)}{u}$$

$$\frac{u}{7u^2+3}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{2}{x}$$

両辺を x で積分すると

$$\frac{1}{14}\log|7u^2+3|=2\log|x|+C$$

両辺に 14 をかけて整理すると

$$\log\left|\frac{7u^2+3}{x^{28}}\right| = C$$

e^C を C と置き直せば

$$\frac{7u^2+3}{x^{28}} = \pm C$$

ただし, $C>0$ である．$u=\dfrac{y}{x}$ であったから代入すると

$$\frac{7u^2+3}{x^{28}} = \frac{7y^2}{x^{30}} + \frac{3}{x^{28}}$$

よって両辺を 7 で割れば

$$\frac{y^2}{x^{30}} + \frac{3}{7x^{28}} = C$$

ただし, $C \neq 0$ である.
$\dfrac{y^2}{x^{30}} + \dfrac{3}{7x^{28}} = 0$, すなわち, $y^2 = -\dfrac{3}{7}x^2$ のとき, 両辺を x で微分すれば

$$2y\frac{dy}{dx} = -\frac{6}{7}x$$

よって $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x}{7y}$ である.

$$\frac{xy}{3}\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{3}\left(-\frac{3x}{7y}\right) = -\frac{x^2}{7}$$

であり, また

$$2x^2+5y^2 = 2x^2 - \frac{15}{7}x^2 = -\frac{x^2}{7}$$

であるから, $\dfrac{xy}{3}\dfrac{dy}{dx} = 2x^2+5y^2$ である．よって一般解は

$$\frac{y^2}{x^{30}} + \frac{3}{7x^{28}} = C \quad (C \text{ は任意定数})$$

【答】　①

問題 003（バリエーション No.45）

次の微分方程式

$$(5x^2+xy)\frac{dy}{dx}=2y^2 \quad (y>0)$$

の一般解として正しいものを, 次の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.
(ただし, C は任意定数とする)

⓪ $Cx=\dfrac{y}{x}+\dfrac{4x}{y}-4$
① $Cx=\dfrac{y}{x}+\dfrac{9x}{y}-6$
② $Cx=\dfrac{y}{x}+\dfrac{16x}{y}-8$
③ $Cx=\dfrac{y}{x}+\dfrac{25x}{y}-10$
④ $C=\dfrac{x^2}{y^3+2xy^2+x^2y}$
⑤ $\dfrac{2y^2}{x}+y=C$
⑥ $\dfrac{2y^2}{x}+3y=C$
⑦ $\dfrac{2y^2}{x}+5y=C$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y^2}{5x^2+xy}=\frac{2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{5+\left(\dfrac{y}{x}\right)}$$

であるから, この微分方程式は同次形である. $u=\dfrac{y}{x}$ とおくと, $\dfrac{dy}{dx}=x\dfrac{du}{dx}+u$ より

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{2u^2}{5+u}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{2u^2}{5+u}-u=\frac{u(u-5)}{u+5}$$

$$\frac{u+5}{u(u-5)}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$$

左辺を部分分数分解し, 両辺を x で積分すると

$$\int\left(\frac{2}{u-5}-\frac{1}{u}\right)\frac{du}{dx}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\log\left|\frac{(u-5)^2}{u}\right|=\log|x|+C$$

e^C を新しく C と置き直すと

$$\frac{(u-5)^2}{ux}=\pm C$$

ただし $C>0$ である. $\dfrac{(u-5)^2}{u}=u-10+\dfrac{25}{u}$ であるから, $u=\dfrac{y}{x}$ を代入して整理すると

$$\frac{y}{x}-10+\frac{25x}{y}=Cx \quad (C\neq 0)$$

また $u=5$, すなわち $y=5x$ はこの微分方程式の解である．よって一般解は

$$\frac{y}{x}-10+\frac{25x}{y}=Cx \quad (C\text{ は任意定数})$$

【答】 ③

問題 004（バリエーション No.44）

次の微分方程式

$$(8x^2-7y^2)\frac{dy}{dx}=4xy$$

の一般解として正しいものを, 次の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.
(ただし, C は任意定数とする)

⓪ $\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{3x^2}{2y^4}=C$

① $\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{3x^2}{4y^4}=C$

② $\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{3x^2}{5y^4}=C$

③ $\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{3x^2}{7y^4}=C$

④ $\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{4x^2}{3y^4}=C$

⑤ $\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{4x^2}{5y^4}=C$

⑥ $\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{4x^2}{7y^4}=C$

⑦ $\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{4x^2}{9y^4}=C$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4xy}{8x^2-7y^2}=\frac{4}{8\left(\frac{x}{y}\right)-7\left(\frac{y}{x}\right)}=\frac{4}{8\left(\frac{y}{x}\right)^{-1}-7\left(\frac{y}{x}\right)}$$

よって, この微分方程式は同次形である．$u=\dfrac{y}{x}$ とおくと, $\dfrac{dy}{dx}=x\dfrac{du}{dx}+u$ であるから

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{4}{8u^{-1}-7u}=\frac{4u}{8-7u^2}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{u(7u^2-4)}{8-7u^2}$$

$$\frac{8-7u^2}{u(7u^2-4)}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$$

部分分数分解し, 両辺を x で積分すると

$$\int\left(\frac{7u}{7u^2-4}-\frac{2}{u}\right)\cdot\frac{du}{dx}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\log|7u^2-4|-2\log|u|=\log|x|+C$$

両辺を 2 倍し, e^C を新しく C と置き直して整理すると,

$$\frac{7u^2-4}{u^4x^2} = \pm C$$

ただし, $C>0$ である. 両辺を 7 で割り, $u=\dfrac{y}{x}$ を代入すれば

$$\frac{1}{y^2} - \frac{4x^2}{7y^4} = C \quad (C \neq 0)$$

$7u^2-4=0$, すなわち $7y^2-4x^2=0$ とする. 両辺を x で微分すると

$$14y\frac{dy}{dx} - 8x = 0$$

よって $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x}{7y}$ である. また $7y^2-4x^2=0$ から $\dfrac{4x}{7y} = \dfrac{y}{x}$ がなりたつので,

$$(8x^2-7y^2)\frac{dy}{dx} = 4x^2 \cdot \frac{y}{x} = 4xy$$

よって $7y^2-4x^2=0$ も解である. 以上から一般解は

$$\frac{1}{y^2} - \frac{4x^2}{7y^4} = C \quad (C \text{ は任意定数})$$

【答】 ⑥