［コース ID：55］　微分方程式

55.8　定数係数非斉次微分方程式

55.8.1　定数係数非斉次微分方程式

問題 001（バリエーション No.1）

微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y=-5x$$

の一般解として正しいものを, 以下の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

0. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}-\dfrac{30x-25}{36}$
1. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}-\dfrac{6x-5}{9}$
2. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}-\dfrac{6x-5}{12}$
3. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}-\dfrac{6x-5}{18}$
4. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}-\dfrac{6x-5}{36}$
5. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}-\dfrac{30x-25}{9}$
6. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}-\dfrac{30x-25}{12}$
7. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}-\dfrac{30x-25}{18}$

(ただし, C_1, C_2 は任意定数)

まず, 斉次微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y=0$$

の解を求める. 特性方程式

$$\lambda^2+5\lambda+6=0$$

を解くと $\lambda=-3,-2$ より一般解は

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$$

次に, もとの微分方程式の解を 1 つ見つけよう. 右辺が 1 次式であるから, 解が

$$y=ax+b$$

の形であると仮定して微分方程式に代入すると, $y'=a,\ y''=0$ であるから

$$0+5a+6(ax+b)=-5x$$

$$(6a+5)x+(5a+6b)=0$$

上の式から

$$\begin{cases}6a+5=0\\5a+6b=0\end{cases}$$

であればよいことが分かる．これを解くと $a=-\dfrac{5}{6},\ b=-\dfrac{1}{6}\cdot\left(-\dfrac{25}{6}\right)=\dfrac{25}{36}.$
よって

$$y=-\frac{5}{6}x+\frac{25}{36}=-\frac{30x-25}{36}$$

は, 与えられた微分方程式の解である．よって一般解は

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}-\frac{30x-25}{36}$$

【答】 ⓪

問題 002（バリエーション No.31）

微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+7\frac{dy}{dx}+10y=5x^2+5x$$

の一般解として正しいものを, 以下の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

⓪ $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{-2x}+\dfrac{25x^2-10x+2}{50}$

① $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{-2x}+\dfrac{300x^2-270x+129}{500}$

② $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{-2x}+\dfrac{75x^2-130x+76}{125}$

③ $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{-2x}+\dfrac{50x^2-110x+67}{100}$

④ $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{-2x}-\dfrac{75x^2-80x+41}{125}$

⑤ $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{-2x}-\dfrac{25x^2-20x+9}{50}$

⑥ $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{-2x}-\dfrac{50x^2-110x+67}{100}$

⑦ $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{-2x}-\dfrac{100x^2-290x+183}{250}$

(ただし, C_1,C_2 は任意定数)

まず, 斉次微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+7\frac{dy}{dx}+10y=0$$

の解を求める．特性方程式

$$\lambda^2+7\lambda+10=0$$

を解くと $\lambda^2+7\lambda+10=(\lambda+5)(\lambda+2)=0$ より $\lambda=-5,-2.$ よって一般解は

$$y=C_1e^{-5x}+C_2e^{-2x}$$

次に, もとの微分方程式の解を 1 つ見つけよう．右辺が 2 次式であるから, 解が

$$y=ax^2+bx+c$$

の形であると仮定して微分方程式に代入すると, $y'=2ax+b,\ y''=2a$ であるから

$$2a+7(2ax+b)+10(ax^2+bx+c)=5x^2+5x$$

整理すると

$$(10a-5)x^2+(14a+10b-5)x+(2a+7b+10c)=0$$

となるので

$$\begin{cases}10a-5=0\\14a+10b-5=0\\2a+7b+10c=0\end{cases}$$

であればよいことが分かる．これを解くと

$$a=\frac{1}{2},\quad b=\frac{1}{10}\cdot\left(5-\frac{14}{2}\right)=-\frac{1}{5},\quad c=-\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{2}{2}-\frac{7}{5}\right)=\frac{1}{25}$$

よって

$$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{1}{25}=\frac{25x^2-10x+2}{50}$$

は, 与えられた微分方程式の解である．よって一般解は

$$y=C_1e^{-5x}+C_2e^{-2x}+\frac{25x^2-10x+2}{50}$$

右辺が多項式のときは, 解の候補も多項式であると仮定して解を求めよう．

【答】 0

問題 002（バリエーション No.100）

微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+8y=-5e^{6x}$$

の一般解として正しいものを, 以下の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ．

0 $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}+\dfrac{4e^{3x}}{35}$

1 $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}+\dfrac{e^{4x}}{16}$

2 $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}+\dfrac{e^{2x}}{12}$

3 $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}+\dfrac{e^{4x}}{48}$

4 $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}-\dfrac{e^{6x}}{40}$

5 $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}-\dfrac{3e^{6x}}{80}$

6 $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}-\dfrac{4e^{5x}}{63}$

7 $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}-\dfrac{e^{6x}}{16}$

(ただし, C_1, C_2 は任意定数)

まず, 斉次微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+8y=0$$

の解を求める．特性方程式

$$\lambda^2+6\lambda+8=0$$

を解くと $\lambda^2+6\lambda+8=(\lambda+4)(\lambda+2)=0$ より $\lambda=-4,-2$. よって一般解は

$$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}$$

次に, もとの微分方程式の解を 1 つ見つけよう. 右辺が指数関数であるから, 解が

$$y=ae^{6x}$$

の形であると仮定して微分方程式に代入すると, $y'=6ae^{6x},\ y''=36ae^{6x}$ であるから

$$36ae^{6x}+6\cdot(6ae^{6x})+8ae^{6x}=-5e^{6x}$$

整理すると

$$(80a+5)e^{6x}=0$$

となるので $80a+5=0$ であればよいことが分かる. これを解くと $a=-\dfrac{1}{16}$ となるので

$$y=-\frac{1}{16}e^{6x}$$

は, 与えられた微分方程式の解である. よって一般解は

$$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}-\frac{e^{6x}}{16}$$

右辺が指数関数 $e^{\alpha x}$ の形のときは, 解の候補も同じ形の指数関数であると仮定して解を求めよう.

【答】 ⑦

問題 003（バリエーション No.100）

微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+8y=-5\sin(-3x)$$

の一般解として正しいものを, 以下の中から選び, その番号を **ア** へマークせよ.

⓪ $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}+\dfrac{4\sin(3x)+72\cos(3x)}{325}$

① $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}+\dfrac{3\sin(3x)+54\cos(3x)}{325}$

② $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}+\dfrac{2\sin(3x)+36\cos(3x)}{325}$

③ $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}+\dfrac{\sin(3x)+18\cos(3x)}{325}$

④ $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}-\dfrac{2\sin(3x)+36\cos(3x)}{325}$

⑤ $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}-\dfrac{3\sin(3x)+54\cos(3x)}{325}$

⑥ $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}-\dfrac{4\sin(3x)+72\cos(3x)}{325}$

⑦ $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}-\dfrac{\sin(3x)+18\cos(3x)}{65}$

(ただし, C_1, C_2 は任意定数)

$\sin(-3x)=-\sin(3x)$ であるから, 微分方程式は

$$\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+8y=5\sin(3x)$$

としてよい．まず, 斉次微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+8y=0$$

の解を求める．特性方程式

$$\lambda^2+6\lambda+8=0$$

を解くと $\lambda^2+6\lambda+8=(\lambda+4)(\lambda+2)=0$ より $\lambda=-4,-2$. よって一般解は

$$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}$$

次に, もとの微分方程式の解を 1 つ見つけよう．右辺が三角関数であるから, 解が

$$y=a\sin(3x)+b\cos(3x)$$

の形であると仮定して微分方程式に代入すると,

$$y'=3(a\cos(3x)-b\sin(3x)),\quad y''=-9(a\sin(3x)+b\cos(3x))=-9y$$

であるから

$$-9y+6\cdot 3(a\cos(3x)-b\sin(3x))+8y=5\sin(3x)$$

$$18(a\cos(3x)-b\sin(3x))-(a\sin(3x)+b\cos(3x))=5\sin(3x)$$

整理すると

$$-(a+18b+5)\sin(3x)+(18a-b)\cos(3x)=0$$

となるので

$$\begin{cases} a+18b+5=0 \\ 18a-b=0 \end{cases}$$

であればよいことが分かる．これを解くと $a=-\dfrac{5}{325}=-\dfrac{1}{65},\quad b=-\dfrac{18}{65}$ となるので

$$y=-\frac{1}{65}\sin(3x)-\frac{18}{65}\cos(3x)=-\frac{\sin(3x)+18\cos(3x)}{65}$$

は, 与えられた微分方程式の解である．よって一般解は

$$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}-\frac{\sin(3x)+18\cos(3x)}{65}$$

右辺が三角関数のときは, 解の候補も三角関数であると仮定して解を求めよう．

【答】　⑦