［コース ID：55］　微分方程式

55.7　定数係数斉次微分方程式

55.7.1　定数係数斉次微分方程式

問題 001（バリエーション No.60）

以下の設問において，$\boxed{\text{ア}}$ については，後に示す選択肢から適するものを選び，その番号をマークせよ．

ただし，$\boxed{\text{ア}}$ に①をマークした場合は，空欄 $\boxed{\text{オ}}$ に対するすべての記号に⓪をマークせよ．

微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - 50y = 0$$

の一般解は $\boxed{\text{ア}}$ の形の方程式 (C_1，C_2 は任意定数) で表され，

$a = \boxed{\text{イウエ}}$，$b = \boxed{\text{オ}}$ である．

また，初期条件

$$x = 0 \text{ のとき，}\quad y = 20,\ \frac{dy}{dx} = 10$$

が与えられるとき，任意定数 C_1, C_2 の値はそれぞれ

$C_1 = \boxed{\text{カ}}$，$C_2 = \boxed{\text{キク}}$ である．

$\boxed{\text{ア}}$ の選択肢：

⓪ $y = C_1e^{ax} + C_2e^{bx}\quad (a < b)$

① $y = (C_1 + C_2x)e^{ax}$

② $y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx)$

特性方程式 $\lambda^2 + 5\lambda - 50 = 0$ を解くと $\lambda^2 + 5\lambda - 50 = (\lambda + 10)(\lambda - 5)$ より $\lambda = -10, 5$ である．異なる 2 つの実数解をもつので，この微分方程式の一般解は $\boldsymbol{y = C_1e^{ax} + C_2e^{bx}}$ の形であり，$\boldsymbol{a = -10,\ b = 5}$ である．

$$y = C_1e^{-10x} + C_2e^{5x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -10C_1e^{-10x} + 5C_2e^{5x}$$

であるから初期条件 $x = 0$ のとき，$y = 20,\ \dfrac{dy}{dx} = 10$ を代入すると

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 20 \\ -10C_1 + 5C_2 = 10 \end{cases}$$

これを解けば $\boldsymbol{C_1 = 6,\ C_2 = 14}$ となる．

【答】　24 **通り**

問題 002（バリエーション No.70）

以下の設問において, $\boxed{\text{ア}}$ については, 後に示す選択肢から適するものを選び, その番号をマークせよ.
ただし, $\boxed{\text{ア}}$ に①をマークした場合は, 空欄 $\boxed{\text{ウ}}$ に対するすべての記号に⓪をマークせよ.

微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

の一般解は $\boxed{\text{ア}}$ の形の方程式 (C_1, C_2 は任意定数) で表され,
$a = \boxed{\text{イ}}$, $b = \boxed{\text{ウ}}$ である.
また, 初期条件

$$x = 0 \text{ のとき}, \quad y = 9, \ \frac{dy}{dx} = 3$$

が与えられるとき, 任意定数 C_1, C_2 の値はそれぞれ
$C_1 = \boxed{\text{エ}}$, $C_2 = \boxed{\text{オカ}}$ である.

$\boxed{\text{ア}}$ の選択肢：

⓪ $y = C_1e^{ax} + C_2e^{bx} \quad (a < b)$
① $y = (C_1 + C_2x)e^{ax}$
② $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$

特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ を解くと $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ より $\lambda = 1$ である. 重解をもつので, この微分方程式の一般解は $\boldsymbol{y = (C_1 + C_2x)e^{ax}}$ の形であり, $\boldsymbol{a = 1}$ である.

$$y = (C_1 + C_2x)e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = (C_1 + C_2(x + 1))e^x$$

であるから初期条件 $x = 0$ のとき, $y = 9$, $\dfrac{dy}{dx} = 3$ を代入すると

$$\begin{cases} C_1 = 9 \\ C_1 + C_2 = 3 \end{cases}$$

これを解けば $\boldsymbol{C_1 = 9,\ C_2 = -6}$ となる.

問題 004（バリエーション No.70）

以下の設問において, $\boxed{\text{ア}}$ については, 後に示す選択肢から適するものを選び, その番号をマークせよ.
ただし, $\boxed{\text{ア}}$ に①をマークした場合は, 空欄 $\boxed{\text{ウエ}}$ に対するすべての記号に⓪をマークせよ.

微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 125y = 0$$

の一般解は $\boxed{\text{ア}}$ の形の方程式 (C_1, C_2 は任意定数) で表され,
$a = \boxed{\text{イ}}$, $b = \boxed{\text{ウエ}}$ である.
また, 初期条件

$$x = 0 \text{ のとき}, \quad y = 2, \ \frac{dy}{dx} = -10$$

が与えられるとき, 任意定数 C_1, C_2 の値はそれぞれ
$C_1 = \boxed{\text{オ}}$, $C_2 = \boxed{\text{カキ}}$ である.

$\boxed{\text{ア}}$ の選択肢：

⓪ $y = C_1e^{ax} + C_2e^{bx} \quad (a < b)$
① $y = (C_1 + C_2x)e^{ax}$
② $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$

特性方程式 $\lambda^2 - 10\lambda + 125 = 0$ を解くと 2 次方程式の解の公式から

$$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 125}}{2} = 5 \pm 10i$$

異なる 2 つの複素数解をもつので, この微分方程式の一般解は $\boldsymbol{y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)}$ の形であり, $\boldsymbol{a = 5,\ b = 10}$ である.

$$y = e^{5x}(C_1 \cos 10x + C_2 \sin 10x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 5e^{5x}\left((C_1 + 2C_2)\cos 10x + (-2C_1 + C_2)\sin 10x\right)$$

であるから初期条件 $x = 0$ のとき, $y = 2$, $\dfrac{dy}{dx} = -10$ を代入すると

$$\begin{cases} C_1 = 2 \\ 5(C_1 + 2C_2) = -10 \end{cases}$$

これを解けば $\boldsymbol{C_1 = 2,\ C_2 = -2}$ となる.