［コース ID：55］　微分方程式

55.2　微分方程式の解

55.2.1　微分方程式の解

問題 001（バリエーション No.1）

A を任意定数とする．関数 $y^2 = x + A$ を一般解として持つ微分方程式は次のうちどれか．

⓪ $y\dfrac{dy}{dx} - 1 = 0$

① $y\dfrac{dy}{dx} + 1 = 0$

② $y\dfrac{dy}{dx} - 2 = 0$

③ $y\dfrac{dy}{dx} + 2 = 0$

④ $2y\dfrac{dy}{dx} - 1 = 0$

⑤ $2y\dfrac{dy}{dx} + 1 = 0$

選んだ記号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ．

関数 $y^2 = x + A$ を x で微分すると

$$2y\frac{dy}{dx} = 1$$

両辺から 1 を引けば $2y\dfrac{dy}{dx} - 1 = 0$ となる．

【答】　④

問題 002（バリエーション No.1）

A, B を任意定数とする. 関数 $y = Ae^{-x} - x + B$ を一般解として持つ微分方程式は, 次のうちどれか.

⓪ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + 1 = 0$

① $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 1 = 0$

② $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 1 = 0$

③ $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + 1 = 0$

④ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y + 1 = 0$

⑤ $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y - 1 = 0$

⑥ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y - 1 = 0$

⑦ $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y + 1 = 0$

選んだ記号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

関数 $y = Ae^{-x} - x + B$ を x で微分すると

$$\frac{dy}{dx} = -Ae^{-x} - 1$$

更にもう一度微分すると

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Ae^{-x}$$

二つの式を足せば

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = -1$$

1 を移項すれば $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + 1 = 0$ である.

【答】　⓪

問題 003（バリエーション No.1）

A, B を任意定数とする．関数 $y = A\sin x + B\cos x - 1$ を一般解として持つ微分方程式は, 次のうちどれか.

⓪ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + 1 = 0$
① $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 1 = 0$
② $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 1 = 0$
③ $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + 1 = 0$
④ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y + 1 = 0$
⑤ $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y - 1 = 0$
⑥ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y - 1 = 0$
⑦ $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y + 1 = 0$

選んだ記号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

関数 $y = A\sin x + B\cos x - 1$ を x で 2 回微分すると

$$\frac{dy}{dx} = A\cos x - B\sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -A\sin x - B\cos x$$

$A\sin x + B\cos x = y + 1$ より $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -(y+1)$. 移項すれば $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y + 1 = 0$ となる.

【答】 ④

問題 004（バリエーション No.1）

微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + p\dfrac{dy}{dx} + qy = 0$ $(p, q$ は定数$)$ の一般解が
$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ $(C_1, C_2$ は任意定数$)$
であるならば, $p = \boxed{\text{アイ}}$, $q = \boxed{\text{ウ}}$ である.

関数 $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ を x で微分すると,

$$\frac{dy}{dx} = 2C_1e^{2x} + 3C_2e^{3x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4C_1e^{2x} + 9C_2e^{3x}$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy &= \left(4C_1e^{2x} + 9C_2e^{3x}\right) + p\left(2C_1e^{2x} + 3C_2e^{3x}\right) + q\left(C_1e^{2x} + C_2e^{3x}\right)\\ &= (4 + 2p + q)C_1e^{2x} + (9 + 3p + q)C_2e^{3x} = 0\end{aligned}$$

C_1 と C_2 は任意定数なので

$$\begin{cases} 4+2p+q=0 \\ 9+3p+q=0 \end{cases}$$

これを解くと, $p=-5,\ q=6$ を得る.

【答】　$\boldsymbol{p=-5,\ q=6}$