# ［コース ID：55］　微分方程式

## 55.3　変数分離形

### 55.3.1　変数分離形

**問題 001（バリエーション No.3）**

次の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = 4y$$

の一般解として正しいものを, 次の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.
(ただし, $C$ は任意定数とする)

⓪ $y = Ce^{x}$
① $y = Ce^{-x}$
② $y = Ce^{2x}$
③ $y = Ce^{-2x}$
④ $y = Ce^{3x}$
⑤ $y = Ce^{-3x}$
⑥ $y = Ce^{4x}$
⑦ $y = Ce^{-4x}$

微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = 4y$ の両辺を $y$ で割ると

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 4$$

両辺の不定積分を考えると

$$\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}\, dx = \int 4\, dx$$

$$\log |y| = 4x + C$$

ここで, $C$ は積分定数である.

$$y = \pm e^{4x+C}$$

であるから $e^{C}$ を新たに $C$ と置き直せば $y = \pm Ce^{4x}$. ただし $C > 0$ である.
$y = 0$ (常に 0 をとり続ける定数関数) も, この微分方程式の解であるから, 結局

$$y = Ce^{4x} \quad (C \text{ は任意定数})$$

がこの方程式の一般解となる.

【答】　⑥

**問題 001（バリエーション No.11）**

次の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = 2y^2$$

の一般解として正しいものを, 次の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.
(ただし, $C$ は任意定数とする)

⓪ $y = \dfrac{1}{2(x+C)}$

① $y = \dfrac{1}{3(x+C)}$

② $y = \dfrac{1}{4(x+C)}$

③ $y = \dfrac{1}{5(x+C)}$

④ $y = -\dfrac{1}{2(x+C)}$

⑤ $y = -\dfrac{1}{3(x+C)}$

⑥ $y = -\dfrac{1}{4(x+C)}$

⑦ $y = -\dfrac{1}{5(x+C)}$

微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = 2y^2$ の両辺を $y^2$ で割ると

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 2$$

両辺を $x$ で積分すると

$$\int \frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx}\,dx = \int 2\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = 2x + C$$

ここで, $C$ は積分定数である. $\dfrac{C}{2}$ を新たに $C$ と置き直し, 両辺の逆数をとれば

$$y = -\frac{1}{2(x+C)}$$

【答】　④

**問題 001（バリエーション No.39）**

次の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{y^2}$$

の一般解として正しいものを, 次の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.
(ただし, $C$ は任意定数とする)

⓪ $y^3 = -\dfrac{1}{2(x+C)}$
① $y^3 = -\dfrac{1}{3(x+C)}$
② $y^3 = -\dfrac{1}{4(x+C)}$
③ $y^3 = -\dfrac{1}{5(x+C)}$
④ $y^3 = 6(x+C)$
⑤ $y^3 = 9(x+C)$
⑥ $y^3 = 12(x+C)$
⑦ $y^3 = 15(x+C)$

微分方程式の両辺に $y^2$ をかけると

$$y^2\frac{dy}{dx} = 5$$

$x$ で積分すれば

$$\int y^2\frac{dy}{dx}\,dx = \int 5\,dx$$

$$\frac{1}{3}y^3 = 5x + C$$

ここで $C$ は積分定数である. $\dfrac{C}{5}$ を新たに $C$ と置き直せば

$$y^3 = 15(x+C)$$

**【答】** ⑦

**問題 001（バリエーション No.49）**

次の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y}{y+1}$$

の一般解として正しいものを, 次の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.
(ただし, $C$ は任意定数とする)

⓪ $y^2 + 2y = 4x + C$
① $y^2 + 2y = 6x + C$
② $y^2 + 2y = 8x + C$
③ $y^2 + 2y = 10x + C$
④ $\log y + y = 2x + C$
⑤ $\log y + y = 3x + C$
⑥ $\log y + y = 4x + C$
⑦ $\log y + y = 5x + C$

微分方程式の両辺を $\dfrac{y}{y+1}$ で割ると

$$\frac{y+1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 5$$

両辺を $x$ で積分すると

$$\int \left(1 + \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{dy}{dx}\,dx = \int 5\,dx$$

$$y + \log y = 5x + C$$

よって一般解は

$$\log y + y = 5x + C$$

となる.

**【答】**　⑦

**問題 002（バリエーション No.1）**

次の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

の一般解として正しいものを, 次の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.
(ただし, $C$ は任意定数とする)

⓪ $y = Ce^{x}$
① $y = Ce^{x^2}$
② $y = Ce^{-x}$
③ $y = Ce^{-x^2}$
④ $y = x^2 + C$
⑤ $y = C - x^2$
⑥ $y = \sqrt{x+C}$
⑦ $y = \sqrt{C-x}$

微分方程式を $y$ で割ると

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2x$$

$x$ で積分すると

$$\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}\, dx = \int 2x\, dx$$

$$\log|y| = x^2 + C$$

ここで $C$ は積分定数である.

$$y = \pm e^{x^2+C}$$

であるから $e^C$ を新たに $C$ と置き直せば

$$y = \pm Ce^{x^2}$$

である. ただし $C > 0$. $y = 0$ もこの微分方程式の解であるから, この微分方程式の一般解は

$$y = Ce^{x^2} \quad (C \text{ は任意定数})$$

【答】　①

**問題 002（バリエーション No.15）**

次の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = 5\frac{y}{x}$$

の一般解として正しいものを, 次の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.
(ただし, $C$ は任意定数とする)

0 $y = Cx^2$
1 $y = Cx^3$
2 $y = Cx^4$
3 $y = Cx^5$
4 $y^2 = 2x^2 + C$
5 $y^2 = 3x^2 + C$
6 $y^2 = 4x^2 + C$
7 $y^2 = 5x^2 + C$

両辺を $y$ で割ると

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{5}{x}$$

$x$ で積分すれば

$$\log|y| = 5\log|x| + C = \log|x^5| + C$$

$$\log\left|\frac{y}{x^5}\right| = C$$

$$\frac{y}{x^5} = \pm e^C$$

$e^C$ を新しく $C$ と置けば $y = \pm Cx^5$. ただし $C > 0$. $y = 0$ もこの微分方程式の解なので, 一般解は

$$y = Cx^5 \quad (C \text{ は任意定数})$$

**【答】** 3

**問題 003（バリエーション No.1）**

次の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = 2xy + 2x + y + 1$$

の一般解として正しいものを, 次の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.
(ただし, $C$ は任意定数とする)

⓪ $y = Ce^{x^2+x} - 1$
① $y = Ce^{x^2+x} + 1$
② $y = Ce^{x^2+2x} - 1$
③ $y = Ce^{x^2+2x} + 1$
④ $y = Ce^{x^2+1} - 1$
⑤ $y = Ce^{x^2+1} + 1$
⑥ $y = Ce^{2x^2+x} - 1$
⑦ $y = Ce^{2x^2+x} + 1$

$2xy + 2x + y + 1 = 2x(y+1) + (y+1) = (y+1)(2x+1)$ より

$$\frac{dy}{dx} = (y+1)(2x+1)$$

両辺を $y+1$ で割って $x$ で積分すれば

$$\int \frac{1}{y+1} \cdot \frac{dy}{dx}\, dx = \int (2x+1)\, dx$$

$$\log|y+1| = x^2 + x + C$$

$e^C$ を新たに $C$ と置けば $y + 1 = \pm Ce^{x^2+x}$, ただし $C > 0$ である.
$y = -1$(常に $-1$ の値をとる定数関数) もこの微分方程式の解であるから, この微分方程式の一般解は

$$y = Ce^{x^2+x} - 1 \quad (C \text{ は任意定数})$$

【答】　⓪

**問題 003（バリエーション No.20）**

次の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 6y + 5$$

の一般解として正しいものを, 次の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.
(ただし, $C$ は任意定数とする)

0 $\log(y+3) - \log(y+4) = x + C$
1 $\log(y+4) - \log(y+5) = x + C$
2 $\log(y+2) - \log(y+3) = x + C$
3 $\log(y+2) - \log(y+4) = 2x + C$
4 $\log(y+3) - \log(y+5) = 2x + C$
5 $\log(y+1) - \log(y+4) = 3x + C$
6 $\log(y+2) - \log(y+5) = 3x + C$
7 $\log(y+1) - \log(y+5) = 4x + C$

$y^2 + 6y + 5 = (y+1)(y+5)$ であるから, 両辺を $y^2 + 6y + 5$ で割って, $x$ で積分すると

$$\int \frac{1}{(y+1)(y+5)} \cdot \frac{dy}{dx}\, dx = \int dx$$

部分分数分解することにより

$$\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+5}\right) \cdot \frac{dy}{dx}\, dx = \int dx$$

$$\log|y+1| - \log|y+5| = 4x + C$$

【答】 7

**問題 004（バリエーション No.2）**

次の微分方程式

$$\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 0$$

の一般解として正しいものを, 次の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.
(ただし, $C$ は任意定数とする)

0 $y = \dfrac{C}{\sin x}$
1 $y = C\cos x$
2 $y = Ce^{\cos x}$
3 $y = Ce^{-\sin x}$
4 $y = -\sin x + x\cos x + C$
5 $y = -x\sin x + \cos x + C$
6 $y = -\sin x + \dfrac{x^2}{2} + C$
7 $y = \cos x + \dfrac{x^2}{2} + C$

変数分離の形に直すと

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin x}{\cos x}$$

両辺を $x$ で積分すれば

$$\log|y|=\log|\cos x|+C$$

$$\log\left|\frac{y}{\cos x}\right|=C$$

$e^C$ を新しく $C$ と置き直せば

$$\frac{y}{\cos x}=\pm C$$

よって $y=\pm C\cos x$, ただし $C>0$ である. $y=0$ もこの微分方程式の解であるから, 一般解は

$$y=C\cos x\quad (C \text{ は任意定数})$$

【答】　①

**問題 004（バリエーション No.6）**

次の微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$$

の一般解として正しいものを, 次の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.
(ただし, $C$ は任意定数とする)

⓪ $y=\log(e^x+C)$
① $y=-\log(e^x+C)$
② $y=\log(C-e^x)$
③ $y=-\log(C-e^x)$
④ $y=Cx+1$
⑤ $y=Cx-1$
⑥ $y=\dfrac{C}{x-1}+1$
⑦ $y=\dfrac{C}{x-1}-1$

両辺に $e^y$ をかけて $x$ で積分すると

$$\int e^y\cdot\frac{dy}{dx}\,dx=\int e^x\,dx$$

$$e^y=e^x+C$$

両辺の対数をとれば

$$y=\log(e^x+C)$$

【答】　⓪

**問題 004（バリエーション No.10）**

次の微分方程式

$$(1-x)\frac{dy}{dx}-1=y$$

の一般解として正しいものを, 次の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.
(ただし, $C$ は任意定数とする)

0 $y=\log(e^x+C)$
1 $y=-\log(e^x+C)$
2 $y=\log(C-e^x)$
3 $y=-\log(C-e^x)$
4 $y=Cx+1$
5 $y=Cx-1$
6 $y=\dfrac{C}{x-1}+1$
7 $y=\dfrac{C}{x-1}-1$

変数分離の形に直すと

$$\frac{1}{y+1}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-x}$$

となるので, 両辺を $x$ で積分すると

$$\log|y+1|=-\log|1-x|+C$$

$$\log|(y+1)(1-x)|=C$$

$-e^C$ を新しく $C$ と置き直せば

$$(y+1)(x-1)=\pm C$$

ただし $C<0$. ここで, $y=-1$ という定数関数もこの微分方程式の解であるから, 一般解は

$$y=\frac{C}{x-1}-1\quad(C\text{ は任意定数})$$

【答】 7