［コース ID：45］　線形代数 II

45.6　逆行列と方程式

45.6.1　逆行列と方程式

問題 001（バリエーション No.1）

$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{\boxed{\text{ア}}} \begin{pmatrix} \boxed{\text{イウ}} & \boxed{\text{エ}} \\ \boxed{\text{オ}} & \boxed{\text{カキ}} \end{pmatrix}$$

である．これを用いて，連立方程式

$$\begin{cases} x + 7y &= 42 \\ x + y &= 0 \end{cases}$$

の解を求めると，$x = \boxed{\text{クケ}}$， $y = \boxed{\text{コ}}$ となる．

掃出し法を用いて逆行列を求める．

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2 行目 から 1 行目を引くと，

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

2 行目 を $\div(-6)$ として，

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{array}\right)$$

1 行目から 2 行目 $\times 7$ を引くと，

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{array}\right)$$

よって，A^{-1} は，

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathbf{6}} \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{7} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

与えられた連立方程式は行列を用いて，次のように表せる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix}$$

両辺に A^{-1} を左から掛けると，単位行列を E として，

$$\begin{aligned} A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A^{-1}\begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix} \\ E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A^{-1}\begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A^{-1}\begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

求めた A^{-1} をあてはめて，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1\times 42 + 7\times 0 \\ 1\times 42 + (-1)\times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$x = \mathbf{-7}$, $y = \mathbf{7}$

問題 002（バリエーション No.1）

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 5 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列 $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ について

$$a_{11} = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}},\quad a_{23} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である．また，連立方程式

$$\begin{cases} x - 3y - 3z &= 19 \\ 5x - 2y - 2z &= 30 \\ -2x + 3y - z &= -15 \end{cases}$$

の解は，$x = \boxed{\text{キ}}$ ，$y = \boxed{\text{クケ}}$ ，$z = \boxed{\text{コサ}}$ である．

掃出し法を用いて A^{-1} を求める．

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2 行目 から 1 行目 $\times 5$ を引き，3 行目に 1 行目 $\times 2$ をたすと，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 13 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2 行目 を $\div 13$ として，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{5}{13} & \frac{1}{13} & 0 \\ 0 & -3 & -7 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1 行目と 3 行目に 2 行目 $\times 3$ をそれぞれ加えて，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{5}{13} & \frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{11}{13} & \frac{3}{13} & 1 \end{array}\right)$$

3 行目 を $\div(-4)$ として，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{5}{13} & \frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{52} & -\frac{3}{52} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

2 行目から 3 行目を引いて，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{52} & \frac{7}{52} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{52} & -\frac{3}{52} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

よって，

$$a_{11} = \boldsymbol{\frac{-2}{13}}\ ,\ a_{23} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

また，A^{-1} は，

$$A^{-1} = \frac{1}{52}\begin{pmatrix} -8 & 12 & 0 \\ -9 & 7 & 13 \\ -11 & -3 & -13 \end{pmatrix}$$

与えられた連立方程式は行列を用いて，次のように表せるので，両辺に A^{-1} を左から掛けると，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 5 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 19 \\ 30 \\ -15 \end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 19 \\ 30 \\ -15 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= A^{-1}\begin{pmatrix} 19 \\ 30 \\ -15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

求めた A^{-1} をあてはめて，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{52}\begin{pmatrix} -8 & 12 & 0 \\ -9 & 7 & 13 \\ -11 & -3 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 19 \\ 30 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{52}\begin{pmatrix} -8\times 19 + 12\times 30 + 0\times(-15) \\ (-9)\times 19 + 7\times 30 + 13\times(-15) \\ (-11)\times 19 + (-3)\times 30 + (-13)\times(-15) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{52}\begin{pmatrix} 208 \\ -156 \\ -104 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$x = \mathbf{4}$, $y = \mathbf{-3}$, $z = \mathbf{-2}$

問題 003（バリエーション No.1）

$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ について

$$a_{12} = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\quad a_{33} = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$$

である．また，連立方程式

$$\begin{cases} -3x + 5y + 2z = -28 \\ x - y + 4z = 2 \\ -4x + 5y + z = -29 \end{cases}$$

の解は，$x = \boxed{\text{キ}}$ ， $y = \boxed{\text{クケ}}$ ， $z = \boxed{\text{コサ}}$ である．

掃出し法を用いて A^{-1} を求める．

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2 行目 を 1 行目と入れ替えた後，さらに 2 行目を 3 行目と入れ替えると

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2 行目 に 1 行目 $\times 4$ を 3 行目に 1 行目 $\times 3$ をそれぞれ加えて，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 17 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 14 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

1 行目に 2 行目を加えて，3 行目から 2 行目 $\times 2$ を引くと，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 21 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 17 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -20 & 1 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

3 行目 を $\div(-20)$ して，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 21 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 17 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{20} & \frac{1}{4} & \frac{1}{10} \end{array}\right)$$

1 行目から 3 行目 $\times 21$ を 2 行目から 3 行目 $\times 17$ をそれぞれ引いて，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{21}{20} & -\frac{1}{4} & -\frac{11}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{20} & -\frac{1}{4} & -\frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{20} & \frac{1}{4} & \frac{1}{10} \end{array}\right)$$

よって，

$$a_{12} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{4}}\ ,\ a_{33} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$$

また，A^{-1} は，

$$A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 21 & -5 & -22 \\ 17 & -5 & -14 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

与えられた連立方程式は行列を用いて，次のように表せる．

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 2 \\ -29 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 2 \\ -29 \end{pmatrix}$$

よって，両辺左から A^{-1} を掛けると，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= A^{-1}\begin{pmatrix} -28 \\ 2 \\ -29 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 21 & -5 & -22 \\ 17 & -5 & -14 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 \\ 2 \\ -29 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 21\times(-28)+(-5)\times 2+(-22)\times(-29) \\ 17\times(-28)+(-5)\times 2+(-14)\times(-29) \\ (-1)\times(-28)+5\times 2+2\times(-29) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 40 \\ -80 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$x = \mathbf{2}$, $y = \mathbf{-4}$, $z = \mathbf{-1}$

問題 004（バリエーション No.1）

$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列 $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ について

$$a_{22} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}},\quad a_{13} = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$$

である．また，連立方程式

$$\begin{cases} -x+5y-4z &= 23 \\ -x-y+5z &= -4 \\ x+4y+3z &= 5 \end{cases}$$

の解は，$x = \boxed{\text{キク}}$ ，$y = \boxed{\text{ケ}}$ ，$z = \boxed{\text{コサ}}$ である．

掃出し法を用いて A^{-1} を求める．

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3 行目 を 1 行目と入れ替えると

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2 行目・3 行目に 1 行目 をそれぞれ加えて，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2 行目 $\div 3$ として，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 9 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1 行目から 2 行目 $\times 4$ を 3 行目から 2 行目 $\times 9$ をそれぞれ引くと，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{23}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -25 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

3 行目 を $\div(-25)$ して，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{23}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{25} & \frac{3}{25} & \frac{2}{25} \end{array}\right)$$

1 行目に 3 行目 $\times\frac{23}{3}$ を加え， 2 行目から 3 行目 $\times\frac{8}{3}$ を引いて，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{23}{75} & -\frac{31}{75} & \frac{7}{25} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{75} & \frac{1}{75} & \frac{9}{75} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{25} & \frac{3}{25} & \frac{2}{25} \end{array}\right)$$

よって，

$$a_{22} = \mathbf{\frac{1}{75}}\ ,\ a_{13} = \mathbf{\frac{7}{25}}$$

また，A^{-1} は，

$$A^{-1} = \frac{1}{75}\begin{pmatrix} -23 & -31 & 21 \\ 8 & 1 & 9 \\ -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

与えられた連立方程式は行列を用いて，次のように表せる．

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

よって，両辺左から A^{-1} を掛けると，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= A^{-1}\begin{pmatrix} 23 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{75}\begin{pmatrix} -23 & -31 & 21 \\ 8 & 1 & 9 \\ -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 23 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{75}\begin{pmatrix} (-23)\times 23+(-31)\times(-4)+21\times 5 \\ 8\times 23+1\times(-4)+9\times 5 \\ (-3)\times 23+9\times(-4)+6\times 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{75}\begin{pmatrix} -300 \\ 225 \\ -75 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$x = \mathbf{-4}$, $y = \mathbf{3}$, $z = \mathbf{-1}$