

## 【コース ID : 45】 線形代数 II

## 45.1 行列の計算

## 45.1.1 行列とは

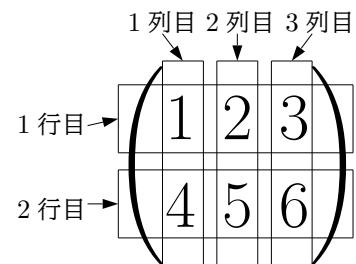
## 問題 001 (バリエーション No.1)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  は  行  列の行列であり, (2, 1) 成分は  である.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  は, 右図のように行・列が表せて,

この行列は, 行数が 2 行目まで, 列数が 3 列目までであるので, 2 行 3 列の行列である.

(2, 1) 成分とは, 2 行目かつ 1 列目の値を問うているので, 図で 2 行目と 1 列目の四角両方に囲まれてる値を読み取ると 4 である.



【答】  2  3  4

## 問題 002 (バリエーション No.1)

行列  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  について正しく説明しているものを、次の中から選び、その番号を  へマークせよ.

- ① 「行ベクトル」である.
- ② 「列ベクトル」である.
- ③ 「正方行列」であるが、「対角行列」ではない.
- ④ 「対角行列」であるが、「単位行列」ではない.
- ⑤ 「単位行列」である.
- ⑥ 以上のいずれにもあてはまらない.

① 「行ベクトル」とは,  $(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$  のように成分が横に表記されるベクトルである.

よって,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  は, 「行ベクトル」ではない. 誤り.

② 「列ベクトル」とは,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  のように成分が縦に表記されるベクトルである.

よって、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  は、「列ベクトル」ではない。誤り。

② 「正方行列」とは、 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  2 行 2 列、 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  3 行 3 列 のように行数と列数が同じ行列である。

「対角行列」は「正方行列」のうち  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$  のように、行列の左上から右下の対角線上の成分（対角成分）以外は 0 の行列である。

よって、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  は、「正方行列」であり、かつ「対角行列」であるので誤り。

③ 「単位行列」とは、「対角行列」のうち、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  のように「対角成分」がすべて 1 の行列である。

よって、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  は、「対角行列」であり、「単位行列」でないので正しい。

④ 「単位行列」は上記 ③ で説明した通りなので、誤り。

【答】 ③

#### 問題 003 (バリエーション No.1)

行列  $\begin{pmatrix} 1 & b+2 \\ a & b \end{pmatrix}$  が対角行列であるならば、 $a = \boxed{\text{ア}}$ 、 $b = \boxed{\text{イウ}}$  である。

「対角行列」なので 対角成分 以外は 0 である。

よって、 $b+2=0$ 、 $a=0$  である。

【答】  $a=0$ 、 $b=-2$

## 45.1.2 行列の計算

## 問題 001 (バリエーション No.1)

次の計算をせよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -9 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 8 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{アイ}} & \boxed{\text{ウエ}} \\ \boxed{\text{オカキ}} & \boxed{\text{ク}} \end{pmatrix}$$

行列の和の計算は,  $i$  行,  $j$  列の成分同士を足すので,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -9 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 8 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-10 & -9+8 \\ -9-8 & -5+9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -9 & -1 \\ -17 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

【答】  $\begin{pmatrix} -9 & -1 \\ -17 & 4 \end{pmatrix}$

## 問題 002 (バリエーション No.1)

次の計算をせよ (空欄で指定された成分のみを解答すること).

$$\begin{pmatrix} -5 & -10 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & -5 & -7 \\ 4 & 9 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} & * & * \\ * & \boxed{\text{イウ}} & * \end{pmatrix}$$

問われているのは, 1 行 1 列, 2 行 2 列の成分のみなので, これらの成分だけ計算する.

1 行 1 列 成分は  $-5, -7$  なので,

$$\begin{aligned} -5 - (-7) &= -5 + 7 \\ &= 2 \end{aligned}$$

2 行 2 列 成分は  $0, 9$  なので,

$$0 - 9 = -9$$

【答】  $\boxed{\text{ア}} \quad 2 \quad \boxed{\text{イウ}} \quad -9$

## 問題 003 (バリエーション No.1)

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -1 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ のとき,}$$

$$-2A + 3B = \begin{pmatrix} \boxed{\text{アイ}} & \boxed{\text{ウエオ}} \\ \boxed{\text{カキ}} & \boxed{\text{ク}} \end{pmatrix}$$

である.

行列の定数倍は,  $i$  行,  $j$  列の成分すべてその定数倍となるので,

$$\begin{aligned} -2A &= -2 \begin{pmatrix} -10 & -1 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 & 2 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3B &= 3 \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -30 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$-2A + 3B = \begin{pmatrix} 29 & -28 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$$

【答】  $\begin{pmatrix} 29 & -28 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$

## 問題 004 (バリエーション No.1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \text{ のとき,}$$

$$3A - 2B - 5C = \begin{pmatrix} \boxed{\text{アイ}} & \boxed{\text{ウエオ}} \\ \boxed{\text{カキ}} & \boxed{\text{クケコ}} \end{pmatrix}$$

である.

$A, B, C$  それぞれ定数倍して, 成分どうしを引いていくと

$$\begin{aligned} 3A - 2B - 5C &= 3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -12 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 & 8 \\ -10 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -15 & 15 \\ -25 & 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 - (-10) - (-15) & 3 - 8 - 15 \\ -12 - (-10) - (-25) & -9 - (-10) - 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 34 & -20 \\ 23 & -14 \end{pmatrix}$$

【答】  $\begin{pmatrix} 34 & -20 \\ 23 & -14 \end{pmatrix}$

問題 005 (バリエーション No.1)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -20 & -8 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \text{ のとき,}$$

$$4A + 4C = B$$

が成り立つならば,  $p = \boxed{\text{アイ}}$ ,  $q = \boxed{\text{ウ}}$ ,  $r = \boxed{\text{エ}}$ ,  $s = \boxed{\text{オカ}}$  である.

$A$ ,  $C$  それぞれ定数倍して, 計算すると

$$4A + 4C = B$$

$$4 \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -8 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -12 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4p & 4q \\ 4r & 4s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -8 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -12 + 4p & -12 + 4q \\ -12 + 4r & 16 + 4s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -8 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

よって,

$$-12 + 4p = -20 \quad \cdots \text{①}$$

$$-12 + 4q = -8 \quad \cdots \text{②}$$

$$-12 + 4r = 0 \quad \cdots \text{③}$$

$$16 + 4s = -4 \quad \cdots \text{④}$$

① より

$$-12 + 4p = -20$$

$$4p = -8$$

$$p = -2$$

② より

$$-12 + 4q = -8$$

$$4q = 4$$

$$q = 1$$

③ より

$$-12 + 4r = 0$$

$$4r = 12$$

$$r = 3$$

④ より

$$16 + 4s = -4$$

$$4s = -20$$

$$s = -5$$

【答】  $p = -2, q = 1, r = 3, s = -5$ 

## 問題 006 (バリエーション No.1)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -5 & -3 & 2 \\ -5 & -4 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \text{ のとき,}$$

$$-2A + 4B = \begin{pmatrix} * & \boxed{\text{アイウ}} & * \\ * & \boxed{\text{エオ}} & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

である（空欄で指定された成分のみを答えよ）。

問われている 1 行 2 列, 2 行 2 列のみ計算する。

【1 行 2 列成分】  $A$  は  $-1$ ,  $B$  は  $-5$  なので

$$\begin{aligned} -2 \times (-1) + 4 \times (-5) &= 2 - 20 \\ &= -18 \end{aligned}$$

【2 行 2 列成分】  $A$  は  $-3$ ,  $B$  は  $4$  なので

$$\begin{aligned} -2 \times (-3) + 4 \times 4 &= 6 + 16 \\ &= 22 \end{aligned}$$

【答】  $\boxed{\text{アイウ}} \quad -18 \quad \boxed{\text{エオ}} \quad 22$

## 問題 007 (バリエーション No.1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 15 & -6 \\ 21 & 12 & 12 \\ -15 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ のとき,}$$
$$3A + 3C = B$$

が成り立つならば、 $a_{11} =$  ,  $a_{31} =$   である。

1 行 1 列, 3 行 1 列のみ計算する。

【1 行 1 列成分】  $A$  は 1,  $B$  は  $-3$  なので

$$\begin{aligned} 3 \times 1 + 3 \times a_{11} &= -3 \\ 3a_{11} &= -3 - 3 \\ a_{11} &= -6 \div 3 \\ &= -2 \end{aligned}$$

【3 行 1 列成分】  $A$  は 0,  $B$  は  $-15$  なので

$$\begin{aligned} 3 \times 0 + 3 \times a_{31} &= -15 \\ 3a_{31} &= -15 \\ &= -5 \end{aligned}$$

【答】   $-2$       $-5$