［コース ID：45］　線形代数 II

45.10　行列式の性質

45.10.1　行列式の性質

問題 001（バリエーション No.1）

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{\text{ア}} \text{ である．}$$

対角線より下の成分が 0 になるように計算していくと，

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} && \text{（2 行目に 1 行目を加え，4 行目に 3 行目を加える．）} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} && \text{（3 行目から 1 行目} \times 2 \text{ を引く．）} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} && \text{（3 行目に 2 行目を加える．）} \\
&= 1 \times 1 \times 1 \times 5 \\
&= \mathbf{5}
\end{aligned}$$

【答】　5

問題 002（バリエーション No.1）

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \boxed{\text{アイウ}} \text{ である．}$$

まず，1 列目の 2 行目より下を 0，次に 2 列目の 3 行目より下が 0 となるように計算していくと，

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$
（1 行 1 列成分が 1 の方が計算がし易いので，1 行目と 2 行目を入れ替える．）

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -7 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \end{vmatrix}$$
（3 行目から 1 行目を引く．2，4 行目から 1 行目 × 2 を引く．）

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & 4 \end{vmatrix}$$
（2 行目と 4 行目を入れ替える.）

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 14 & -5 \end{vmatrix}$$
（3 行目に 2 行目を加える．4 行目から 2 行目 × 3 を引く．）

$$= 1 \times 1 \times \{(-7) \times (-5) - 5 \times 14\}$$
$$= \mathbf{-35}$$

【答】　-35

問題 003（バリエーション No.1）

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{\text{アイ}}$$ である.

まず，1 列目の 2 行目より下を 0， 次に 2 列目の 3 行目より下が 0 となるように計算していくと，

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$
（1 行 1 列成分が 1 の方が計算がし易いので，まず,1 列目と 2 列目を入れ替えて)

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$
（1 行目と 2 行目を入れ替える.）

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$
（2 行目から 1 行目 × 2 を引く．3 行目から 1 行目 × 3 を引く．）

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} (3\text{ 行目から }2\text{ 行目}\times 9\text{ を引く．} \\ \ 4\text{ 行目から }2\text{ 行目}\times 4\text{ を引く．}) \end{array}$$

$$= 1 \times 1 \times \{10 \times (-2) - (-13) \times 1\}$$

$$= \mathbf{-7}$$

【答】　$\mathbf{-7}$

問題 004（バリエーション No.1）

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{\text{アイ}}$$ である．

まず，1 列目の 2 行目より下を 0，次に 2 列目の 3 行目より下が 0 となるように計算していくと，

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad (3\text{ 行目成分は }2\text{ の倍数なので},2\text{ を前に出す．}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad (1\text{ 行目と }3\text{ 行目を入れ替える．})$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -4 & -5 \end{vmatrix} \quad (2,3,4\text{ 行目から }1\text{ 行目}\times 2, \times 3, \times 4\text{ をそれぞれ引く．})$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -4 & -5 \end{vmatrix} \quad (2\text{ 行目成分は }-1\text{ の倍数なので，前に出す．})$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} (3\text{ 行目に }2\text{ 行目}\times 2\text{ を加える．} \\ \ 4\text{ 行目に }2\text{ 行目}\times 4\text{ を加える．}) \end{array}$$

$$= 2 \times 1 \times 1 \times \{(-2) \times (-1) - (-1) \times (-4)\}$$

$$= \mathbf{-4}$$

【答】　$\mathbf{-4}$

問題 005（バリエーション No.1）

次の行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

を因数分解した結果として正しいものを，以下のなかから選び，その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ．

0 $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

1 $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

2 $-(a-b)(b-c)(c-a)$

3 $(a-b)(b-c)(c-a)$

4 $-abc(a-b)(b-c)(c-a)$

5 $abc(a-b)(b-c)(c-a)$

6 $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

7 $(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b)$

まず，1 列目の 2 行目より下を 0 となるように計算していくと，

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & ca-bc & ab-bc \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \quad \text{（2,3 行目から 1 行目} \times bc, \times a^2 \text{をそれぞれ引く．）} \\
&= 1 \times \{(ca-bc)\times(c^2-a^2)-(ab-bc)\times(b^2-a^2)\} \\
&= \{c(a-b)(c-a)(c+a)-b(a-c)(b-a)(b+a)\} \\
&= (a-b)(c-a)\{c(c+a)-b(b+a)\} \\
&= (a-b)(c-a)\{c(a+b+c)-b(a+b+c)\} \\
&= \boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}
\end{aligned}$$

【答】 0

問題 006（バリエーション No.1）

次の行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ (b+c)^3 & (c+a)^3 & (a+b)^3 \end{vmatrix}$$

を因数分解した結果として正しいものを，以下のなかから選び，その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ．

0. $(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$
1. $-(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$
2. $(a-b)(b-c)(c-a)$
3. $-(a-b)(b-c)(c-a)$
4. $abc(a-b)(b-c)(c-a)$
5. $2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$
6. $-2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$
7. $(2a+b+c)(b-a)(c-a)$

まず，1 列目の 2 行目より下を 0 となるように計算していくと，

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ (b+c)^3 & (c+a)^3 & (a+b)^3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & (c+a)^3-(b+c)^3 & (a+b)^3-(b+c)^3 \end{vmatrix} \\
&= (b-a)\times\{(a+b)^3-(b+c)^3\}-(c-a)\{(c+a)^3-(b+c)^3\} \\
&= (b-a)\{(a+b)-(b+c)\}\{(a+b)^2+(a+b)(b+c)+(b+c)^2\} \\
&\quad -(c-a)\{(c+a)-(b+c)\}\{(c+a)^2+(c+a)(b+c)+(b+c)^2\} \\
&= (b-a)(a-c)\{a^2+3b^2+c^2+3ab+3bc+ca\} \\
&\quad -(c-a)(a-b)\{a^2+b^2+3c^2+ab+3bc+3ca\} \\
&= (a-b)(c-a)\{2(b^2-c^2)+2a(b-c)\} \\
&= 2(a-b)(c-a)\{(b-c)(b+c)+a(b-c)\} \\
&= 2(a-b)(c-a)(b-c)\{(b+c)+a\} \\
&= \boldsymbol{2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)}
\end{aligned}$$

【答】 5

問題 007（バリエーション No.1）

次の行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

を因数分解した結果として正しいものを，以下のなかから選び，その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ．

0. $(a+b+c+d)^3$
1. $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$
2. $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(a-c)(d-b)$
3. $(a-b)(a+b)(c-d)(c+d)(b+d)(b-d)$
4. $(a-b)(a+b)(a-c)(d-a)(d+b)(d-c)$
5. $(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)$
6. $(a-b)^2(c-d)^2$
7. $(a+b-c)(b+c-d)(c+d-a)(d+a-b)$

2，3，4 行目から 1 行目 $\times a$，$\times a^2$，$\times a^3$ をそれぞれ引くと，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix}$$

3, 4 行目から 2 行目 $\times(a+b)$，2 行目 $\times(a^2+ab+b^2)$ をそれぞれ引くと

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c+a)-(c-a)(a+b) & (d-a)(d+a)-(d-a)(a+b) \\ 0 & 0 & (c-a)(c^2+ca+a^2)-(c-a)(a^2+ab+b^2) & (d-a)(d^2+da+a^2)-(d-a)(a^2+ab+b^2) \end{vmatrix}$$

3，4 行目を整理して，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) & (d-a)(d-b) \\ 0 & 0 & (c-a)(c^2-b^2+ca-ab) & (d-a)(d^2-b^2+da-ab) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) & (d-a)(d-b) \\ 0 & 0 & (c-a)\{(c-b)(c+b)+a(c-b)\} & (d-a)\{(d-b)(d+b)+a(d-b)\} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) & (d-a)(d-b) \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b)(a+b+c) & (d-a)(d-b)(a+b+d) \end{vmatrix}$$

1，$(b-a)$ を前に出して計算すると，求める行列式は，

$$
\begin{aligned}
&1\times(b-a)\times\{(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(a+b+d)-(d-a)(d-b)(c-a)(c-b)(a+b+c)\}\\
&=(b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)\{(a+b+d)-(a+b+c)\}\\
&=(b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)\\
&=\boldsymbol{(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(a-c)(d-b)}
\end{aligned}
$$

【答】 ②

問題 008（バリエーション No.1）

x に関する次の方程式

$$
\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & -4 & -4 \\ x & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0
$$

の解は，$x=$ $\boxed{\text{アイ}}$ ，$\boxed{\text{ウ}}$ である．

与えられた行列式の 3 行目から 1 行目 $\times\ x$ を引いた後，方程式を計算すると，

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & -x^2 \end{vmatrix} &= 0\\
1\times\{(-4)\times(-x^2)-(-4)\times(-4)\} &= 0\\
4x^2-16 &= 0\\
(x+2)(x-2) &= 0\\
\therefore\quad x = \boldsymbol{-2}\ ,\ \boldsymbol{2}
\end{aligned}
$$