［コース ID：45］　線形代数 II

45.13　行列式と連立一次方程式

45.13.1　行列式と連立一次方程式

問題 001（バリエーション No.1）

行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ において，

$|A| =$ $\boxed{\text{アイウ}}$ である．

また，$|A|$ の第 j 列を $\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix}$ で置き換えて得られる行列式を Δ_j とすると

$\Delta_1 =$ $\boxed{\text{エオ}}$，$\Delta_2 =$ $\boxed{\text{カ}}$，$\Delta_3 =$ $\boxed{\text{キクケ}}$

である．これらの結果を用いて、連立方程式

$$\begin{cases} -2x + 2y + 3z &= 8 \\ 4x + 5y - 3z &= -10 \\ -2x + 3y + 5z &= 12 \end{cases}$$

の解を求めると、$x =$ $\boxed{\text{コサ}}$，$y =$ $\boxed{\text{シ}}$，$z =$ $\boxed{\text{ス}}$ となる．

行列式の性質を利用して，2 行目以下の 1 列目を 0 に変形して，計算すると

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \qquad \text{（2 行目に 1 行目 × 2 を加え,3 行目から 1 行目を引く）} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{（2 行目に 1 行目 × 2 を加え,3 行目から 1 行目を引く）} \\ &= -2 \times \{9 \times 2 - 3 \times 1\} \\ &= \mathbf{-30} \end{aligned}$$

Δ_1 を計算すると，

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ -10 & 5 & -3 \\ 12 & 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 4 \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -10 & 5 & -3 \\ 12 & 3 & 5 \end{vmatrix} \qquad \text{（1 行目の 4 を前に出して）} \end{aligned}$$

$$= 4\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{15}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \qquad \text{（2 行目に 1 行目} \times 5 \text{ を加え,3 行目から 1 行目} \times 6 \text{ を引く）}$$

$$= 4 \times 2 \times \frac{15}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \mathbf{30}$$

Δ_2 を計算すると,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 8 & 3 \\ 4 & -10 & -3 \\ -2 & 12 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 8 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{（2 行目に 1 行目} \times 2 \text{ を加え,3 行目から 1 行目を引く）}$$

$$= -2 \times \{6 \times 2 - 3 \times 4\}$$

$$= \mathbf{0}$$

Δ_3 を計算すると,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & -10 \\ -2 & 3 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{（2 行目に 1 行目} \times 2 \text{ を加え,3 行目から 1 行目を引く）}$$

$$= -2 \times \{9 \times 4 - 6 \times 1\}$$

$$= \mathbf{-60}$$

よって

$$x = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{30}{-30} = \mathbf{-1}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{|A|} = \frac{0}{-30} = \mathbf{0}$$

$$z = \frac{\Delta_3}{|A|} = \frac{-60}{-30} = \mathbf{2}$$

問題 002（バリエーション No.1）

x, y, z についての連立一次方程式

$$\begin{cases} -4x-4y+cz &= 0 \\ -4x-3y-2z &= 0 \\ -4x+2y+3z &= 0 \end{cases}$$

が，$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)$ 以外の解を持つならば，$c=$ $\boxed{\text{アイ}}$ である．
また、このときの解は

$$(x,\ y,\ z)=(k,\ \boxed{\text{ウエ}}\,k,\ \boxed{\text{オ}}\,k)$$

（ただし、k は任意の実数）と表される．

次のような行列を A として，

$$A=\begin{pmatrix} -4 & -4 & c \\ -4 & -3 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

与えられた連立一次方程式は，次のように表せる．

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A が逆行列がもつならば，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}&=A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であり，$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)$ となり，題意を満たさない．よって，A は，逆行列をもたない．

$$\begin{aligned}|A|&=\begin{vmatrix} -4 & -4 & c \\ -4 & -3 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix} -4 & -4 & c \\ 0 & 1 & -2-c \\ 0 & 6 & 3-c \end{vmatrix} \qquad \text{（2，3 行目から 1 行目を引く）}\\ &=-4\times\{1\times(3-c)-(-2-c)\times 6\}\\ &=-4(15+5c)\\ &=-20(3+c)\end{aligned}$$

よって，$c=\mathbf{-3}$

与えられた連立一次方程式に $c = -3$ を代入，

$$\begin{cases} -4x - 4y - 3z &= 0 & \cdots ① \\ -4x - 3y - 2z &= 0 & \cdots ② \\ -4x + 2y + 3z &= 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

② $\times 3 -$ ① $\times 2$ より，

$$\begin{aligned} -12x + 8x - 9y + 8y &= 0 \\ -4x - y &= 0 \\ y &= -4x \end{aligned}$$

① に代入，

$$\begin{aligned} -4x - 4(-4x) - 3z &= 0 \\ 12x - 3z &= 0 \\ z &= 4x \end{aligned}$$

これらは ③ も満たす．

k を任意の実数として，解は，

$$x = k\ ,\ y = \mathbf{-4}k\ ,\ z = \mathbf{4}k$$

問題 003（バリエーション No.1）

以下の設問で、空欄 $\boxed{\text{イ}}$ には後の選択肢から適するものを選び、その番号をマークせよ．

$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{\text{ア}}$ であるから，

2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$， $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $\boxed{\text{イ}}$ ．

$\boxed{\text{イ}}$ の選択肢：

0 線形独立である

1 線形従属である

行列 A を次のように表すと

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

与えられた行列式は，$|A|$ と表せ，

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} &= (-2) \times 2 - 1 \times (-4) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

であり，A は，逆行列をもたず，２つのベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$， $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は，線形従属である．

$\boxed{\text{イ}}$ の答え 1

問題 004（バリエーション No.1）

以下の設問で、空欄 $\boxed{\text{イ}}$ には後の選択肢から適するものを選び、その番号をマークせよ．

$$\begin{vmatrix} -6 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = \boxed{\text{ア}}$$ であるから，

3 つのベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ は $\boxed{\text{イ}}$.

$\boxed{\text{イ}}$ の選択肢：

⓪ 線形独立である

① 線形従属である

行列 A を次のように表すと

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

与えられた行列式は，$|A|$ と表せ，

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} -6 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6 & 2 & 8 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} && \text{（1 行目と 2 行目を入れ替えて）} \\
&= -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6+2\times 3 & 2+1\times 3 & 8+(-1)\times 3 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} && \text{（2 行目に 1 行目 × 3 を加えて）} \\
&= -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} && \text{（3 行目に 2 行目を加えて）} \\
&= -2\times 5\times 0 \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

であり，A は，逆行列をもたず，3 つのベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ は，線形従属である．

$\boxed{\text{イ}}$ の答え ①