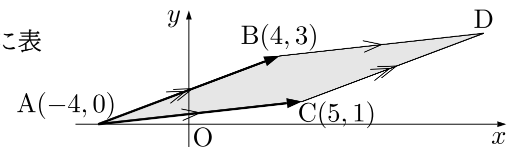
［コース ID：45］　線形代数 II

45.14　行列式の図形への応用

45.14.1　行列式の図形への応用

問題 001（バリエーション No.1）

A$(-4,\ 0)$，B$(4,\ 3)$，C$(5,\ 1)$ とするとき，AB，AC を２辺とする平行四辺形の面積は $\boxed{\text{アイ}}$ である．



平行四辺形のもう一つの頂点を D として，座標平面上に表すと右図のようになる．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分は，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (4\ ,\ 3) - (-4\ ,\ 0)\\ &= (4-(-4)\ ,\ 3-0)\\ &= (8\ ,\ 3)\end{aligned}$$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の成分は，

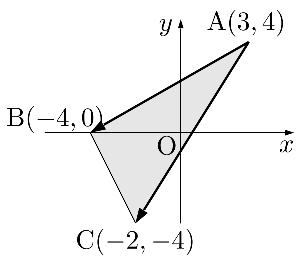
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (5\ ,\ 1) - (-4\ ,\ 0)\\ &= (5-(-4)\ ,\ 1-0)\\ &= (9\ ,\ 1)\end{aligned}$$

2 つのベクトルがなす平行四辺形の面積は，2 つのベクトルの行列式の値（の絶対値）に等しいので，

$$\begin{aligned}|\,|A|\,| &= \left|\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right|\\ &= |8\times 1 - 9\times 3|\\ &= |-19|\\ &= \mathbf{19}\end{aligned}$$

問題 002（バリエーション No.1）

A$(3,\ 4)$，B$(-4,\ 0)$，C$(-2,\ -4)$ とするとき、三角形 ABC の面積は $\boxed{\text{アイ}}$ である．



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分は，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (-4\ ,\ 0) - (3\ ,\ 4)\\ &= (-4-3\ ,\ 0-4)\\ &= (-7\ ,\ -4)\end{aligned}$$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の成分は，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (-2\ ,\ -4) - (3\ ,\ 4)\\ &= ((-2) - 3\ ,\ (-4) - 4)\\ &= (-5\ ,\ -8)\end{aligned}$$

2 つのベクトルがなす三角形の面積 △ABC は，2 つのベクトルの行列式の値（の絶対値）の $\frac{1}{2}$ に等しいので，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} -7 & -5 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} \right|\\ &= \frac{1}{2}\,|(-7)\times(-8) - (-5)\times(-4)|\\ &= \frac{1}{2}\,|56 - 20|\\ &= \mathbf{18}\end{aligned}$$

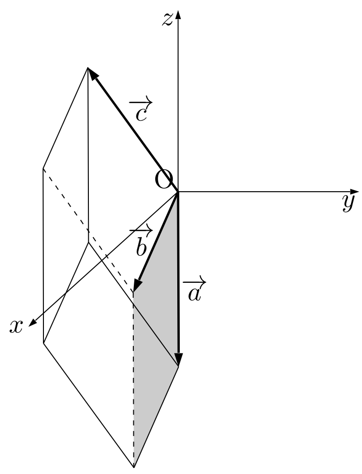
問題 003（バリエーション No.1）

空間内の３つのベクトル

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

によって作られる平行六面体の体積は $\boxed{\text{アイ}}$ である．

平行六面体の体積 V は，$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とすると，



$$V = \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right|$$

なので，

$$\begin{aligned}V &= \left| \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} \right|\\ &= \left| - \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} \right| \qquad \text{（1 行目と 2 行目を入れ替えて）}\end{aligned}$$

$$= \left| -\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right| \qquad \text{（1 行目 × 2 を 2 行目から引き,3 行目に加える）}$$

$$= |-2\{3 \times 1 - 6 \times (-2)\}|$$

$$= |-30|$$

$$= \mathbf{30}$$

問題 004（バリエーション No.1）

空間内の３つのベクトル

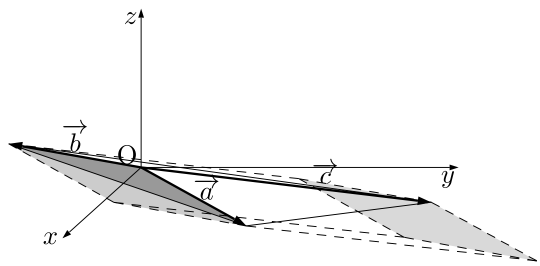
$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

によって作られる四面体の体積は $\boxed{\text{ア}}$ である.

$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とした時

の平行六面体の体積を V_6 とすると,

$$V_6 = \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right|$$



求める四面体の体積を V とすると，平行六面体に比して，底面積 $\frac{1}{2}$ ，三角錐なので， $\frac{1}{3}$ となるので，

$$V = \frac{1}{6}V_6$$

$$= \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{6} \left| -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \right| \qquad \text{（1 行目と 2 行目を入れ替えて）}$$

$$= \frac{1}{6} \left| -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & -6 & 6 \end{vmatrix} \right| \qquad \text{（1 行目 × 2 を 2 , 3 行目に加える）}$$

$$= \frac{1}{6}|-1 \times \{(-7) \times 6 - 5 \times (-6)\}|$$

$$= \frac{1}{6}|-(-42+30)|$$

$$= \mathbf{2}$$