［コース ID：45］　線形代数 II

45.3　転置行列

45.3.1　転置行列

問題 001（バリエーション No.1）

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$， $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，

$$ {}^t(AB) = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イ}} \\ \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エオカ}} \end{pmatrix} $$

である．

まず A と B の積を計算すると，

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\times 0 + (-2)\times(-1) & 2\times 3 + (-2)\times 1 \\ (-4)\times 0 + (-1)\times(-1) & (-4)\times 3 + (-1)\times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この行列の転置行列を求めると，

$$ {}^t(AB) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -13 \end{pmatrix} $$

【答】 $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-13} \end{pmatrix}$

問題 002（バリエーション No.1）

$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$， $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ のとき，

$$ {}^tA\,{}^tB = \begin{pmatrix} \boxed{\text{アイ}} & \boxed{\text{ウ}} \\ \boxed{\text{エオ}} & \boxed{\text{カキク}} \end{pmatrix} $$

である．

A の転置行列は，

$$
\begin{aligned}
{}^tA &= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{\top} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

B の転置行列は，

$$
\begin{aligned}
{}^tB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}^{\top} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

これにより，${}^tA$ と ${}^tB$ の積を計算すると，

$$
\begin{aligned}
{}^tA{}^tB &= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-3)\times 1 + 0 \times 2 & (-3)\times(-1) + 0 \times (-4) \\ 4 \times 1 + 3 \times 2 & 4 \times (-1) + 3 \times (-4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{10} & \mathbf{-16} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

【答】 $\begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{10} & \mathbf{-16} \end{pmatrix}$

問題 003（バリエーション No.1）

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ のとき，

$$ {}^t(ABC) = \begin{pmatrix} \boxed{\text{アイ}} & \boxed{\text{ウエ}} \\ \boxed{\text{オカ}} & \boxed{\text{キク}} \end{pmatrix} $$

である．

A，B，C の積を先に計算すると，

$$
\begin{aligned}
ABC &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\times 2 + 0\times 2 & 2\times(-1) + 0\times(-1) \\ (-1)\times 2 + 2\times 2 & (-1)\times(-1) + 2\times(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4\times(-2) + (-2)\times(-2) & 4\times(-2) + (-2)\times(-1) \\ 2\times(-2) + (-1)\times(-2) & 2\times(-2) + (-1)\times(-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ABC の転置行列は，

$$
\begin{aligned}
{}^t(ABC) &= \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

【答】 $\begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$