［コース ID：45］　線形代数 II

45.11　行列式の応用

45.11.1　行列式の応用

問題 001（バリエーション No.1）

以下は，行列式 $\begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ -4 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ を第 1 行に関する展開によって求める過程を示したものである．

式中に現れる空欄を埋めよ．

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ -4 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{\text{アイ}} \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boxed{\text{ウエ}} & 4 \\ \boxed{\text{オ}} & -2 \end{vmatrix} + \boxed{\text{カ}} \begin{vmatrix} \boxed{\text{キク}} & -5 \\ 3 & \boxed{\text{ケ}} \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{\text{コ}}$$

行列式の性質を利用して，3 つの行列式の和として表す．1 行目の成分を 3 数の和と考えて，

$$\begin{vmatrix} -5+0+0 & 0+1+0 & 0+0+2 \\ -4 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -4 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

2 つめの行列式の 1 列目と 2 列目を入れ替え，3 つめの行列式の 3 列目と 2 列目を入れ替え，さらに 2 列目と 1 列目を入れ替えすれば（1 度入れ替えるたびに符号が変わることに注意）

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

1 行 1 列の成分が前に出せるので，

$$(-5) \times \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \times 1 \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^2 \times 2 \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{-5} \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{-4} & 4 \\ \mathbf{3} & -2 \end{vmatrix} + \mathbf{2} \begin{vmatrix} \mathbf{-4} & -5 \\ 3 & \mathbf{2} \end{vmatrix}$$

$$= (-5)\{(-5) \times (-2) - 4 \times 2\} - \{(-4) \times (-2) - 4 \times 3\} + 2\{(-4) \times 2 - (-5) \times 3\}$$

$$= -10 + 4 + 14$$

$$= \mathbf{8}$$

問題 002（バリエーション No.1）

以下は、行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ を第 2 行に関する展開によって求める過程を示したものである.

式中に現れる空欄を埋めよ.

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{\text{ア}} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \boxed{\text{イ}} & -2 \\ \boxed{\text{ウ}} & 5 \end{vmatrix} + \boxed{\text{エ}} \begin{vmatrix} \boxed{\text{オ}} & \boxed{\text{カ}} \\ 3 & \boxed{\text{キク}} \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{\text{ケコ}}$$

まず，与えられた行列式の 1 行目と 2 行目を入れ替えて，（入れ替えるごとに符号が変わるので，そこで生じた -1 を 1 行成分に掛けておく）

$$(-1) \times \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

行列式の性質を利用して，3 つの行列式の和として表す．1 行目の成分を 3 数の和と考えて，

$$\begin{vmatrix} 2+0+0 & 0+(-2)+0 & 0+0+2 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

2 つめの行列式の 1 列目と 2 列目を入れ替え，3 つめの行列式の 3 列目と 2 列目を入れ替え，さらに 2 列目と 1 列目を入れ替えすれば（1 度入れ替えるたびに符号が変わることに注意）

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

1 行 1 列の成分が前に出せるので，

$$2 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (-1) \times (-2) \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^2 \times 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \mathbf{5} & -2 \\ \mathbf{3} & 5 \end{vmatrix} + \mathbf{2} \begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ 3 & \mathbf{-1} \end{vmatrix}$$

$$= 2\{1 \times 5 - (-2) \times (-1)\} + 2\{5 \times 5 - (-2) \times 3\} + 2\{5 \times (-1) - 1 \times 3\}$$

$$= 2 \times 3 + 2 \times 31 + 2 \times (-8)$$

$$= \mathbf{52}$$

問題 004（バリエーション No.1）

以下は，行列式 $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 4 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix}$ を第 1 列に関する展開によって求める過程を示したものである．

式中に現れる空欄を埋めよ（ただし，$*$ で示した成分は解答する必要はない）．

与えられた行列式を転置すると，

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{\text{アイ}} \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \end{vmatrix} - \boxed{\text{オ}} \begin{vmatrix} \boxed{\text{カ}} & -4 \\ \boxed{\text{キク}} & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boxed{\text{ケ}} & 4 \\ \boxed{\text{コサ}} & \boxed{\text{シ}} \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{\text{スセ}}$$

行列式の性質より，転置しても，行列式の値は変わらない．与えられた行列式を転置すると，

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 4 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & -4 \\ -5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

行列式の性質を利用して，3 つの行列式の和として表す．1 行目の成分を 3 数の和と考えて，

$$\begin{vmatrix} (-2)+0+0 & 0+4+0 & 0+0+(-1) \\ 1 & 4 & -4 \\ -5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \\ -5 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \\ -5 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -4 \\ -5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

2 つめの行列式の 1 列目と 2 列目を入れ替え，3 つめの行列式の 3 列目と 2 列目を入れ替え，さらに 2 列目と 1 列目を入れ替えすれば（1 度入れ替えるたびに符号が変わることに注意）

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \\ -5 & 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

1 行 1 列の成分が前に出せるので，

$$(-2) \times \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \times 4 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 \times (-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{-2} \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{vmatrix} - \mathbf{4} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -4 \\ \mathbf{-5} & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 4 \\ \mathbf{-5} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

$$= (-2)\{4 \times 3 - (-4) \times 1\} - 4\{1 \times 3 - (-4) \times (-5)\} - \{1 \times 1 - 4 \times (-5)\}$$

$$= (-2) \times 16 - 4 \times (-17) - 21$$

$$= \mathbf{15}$$

問題 005（バリエーション No.1）

以下は，行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ を第 2 列に関する展開によって求める過程を示したものである．

式中に現れる空欄を埋めよ（ただし，$*$ で示した成分は解答する必要はない）．

与えられた行列式を転置すると，

$$\begin{vmatrix} * & * & * \\ 2 & -3 & -3 \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{\text{アイ}} \begin{vmatrix} \boxed{\text{ウエ}} & 1 \\ \boxed{\text{オカ}} & 2 \end{vmatrix} - \boxed{\text{キ}} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ \boxed{\text{クケ}} & \boxed{\text{コ}} \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \boxed{\text{サシ}} & -1 \\ \boxed{\text{スセ}} & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{\text{ソタ}}$$

行列式の性質より，転置しても，行列式の値は変わらない．与えられた行列式を転置して，1 行目と 2 行目を入れ替え，入れ替えによって生じた (-1) を 1 行目成分にかけて，

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

行列式の性質を利用して，3 つの行列式の和として表す．1 行目の成分を 3 数の和と考えて，

$$\begin{vmatrix} (-2)+0+0 & 0+3+0 & 0+0+3 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

2 つめの行列式の 1 列目と 2 列目を入れ替え，3 つめの行列式の 3 列目と 2 列目を入れ替え，さらに 2 列目と 1 列目を入れ替えすれば（1 度入れ替えるたびに符号が変わることに注意）

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

1 行 1 列の成分が前に出せるので，

$$(-2) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \times 3 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^2 \times 3 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{-2} \begin{vmatrix} \mathbf{-1} & 1 \\ \mathbf{-1} & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \mathbf{-3} & -1 \\ \mathbf{-1} & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)\{(-1) \times 2 - 1 \times (-1)\} - 3\{(-3) \times 2 - 1 \times (-1)\} + 3\{(-3) \times (-1) - (-1) \times (-1)\}$$

$$= (-2) \times (-1) - 3 \times (-5) + 3 \times 2$$

$$= \mathbf{23}$$

問題 007（バリエーション No.1）

行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ を第 1 行に関して展開したとき，各小行列式の値は

$D_{11} =$ ア，$D_{12} =$ イウ，$D_{13} =$ エオ，$D_{14} =$ カ

である．従って，$|A| =$ キ となる．

小行列式 D_{ij} は，i 行成分と j 列成分を除いた成分での行列式なので，

$$
\begin{aligned}
D_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{（サラスの方法で計算すると）} \\
&= 1 \times 1 \times 0 + 0 \times (-1) \times 1 + 1 \times 0 \times 1 - 1 \times 1 \times 1 - 1 \times (-1) \times 1 - 0 \times 0 \times 0 \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

同様に，

$$
\begin{aligned}
D_{12} &= \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-2) \times 1 \times 0 + 0 \times (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) \times 1 \\
&\quad - 1 \times 1 \times (-1) - (-2) \times (-1) \times 1 - 0 \times (-1) \times 0 \\
&= \mathbf{-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{13} &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-2) \times 0 \times 0 + 1 \times (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) \times 1 \\
&\quad - 1 \times 0 \times (-1) - (-2) \times (-1) \times 1 - 1 \times (-1) \times 0 \\
&= \mathbf{-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{14} &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-2) \times 0 \times 1 + 1 \times 1 \times (-1) + 0 \times (-1) \times 1 \\
&\quad - 0 \times 0 \times (-1) - (-2) \times 1 \times 1 - 1 \times (-1) \times 1 \\
&= \mathbf{2}
\end{aligned}
$$

i 行 j 列の成分を，a_{ij} とすると，行列式 $|A|$ は次のように表せるので，それぞれの値をあてはめて，

$$
\begin{aligned}
|A| &= (-1)^{(1+1)} a_{11} D_{11} + (-1)^{(1+2)} a_{12} D_{12} + (-1)^{(1+3)} a_{13} D_{13} + (-1)^{(1+4)} a_{14} D_{14} \\
&= (-1)^2 \times 1 \times 0 + (-1)^3 \times 1 \times (-2) + (-1)^4 \times (-2) \times (-2) + (-1)^5 \times 1 \times 2 \\
&= \mathbf{4}
\end{aligned}
$$

問題 014（バリエーション No.1）

行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ を第 4 列に関して展開したとき，各小行列式の値は

$$D_{14} = \boxed{\text{ア}},\quad D_{24} = \boxed{\text{イ}},\quad D_{34} = \boxed{\text{ウエオ}},\quad D_{44} = \boxed{\text{カキク}}$$

である．従って，$|A| = \boxed{\text{ケコ}}$ となる．

小行列式 D_{ij} は，i 行成分と j 列成分を除いた成分での行列式なので，

$$\begin{aligned} D_{14} &= \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \text{（サラスの方法で計算すると）} \\ &= (-2)\times(-1)\times(-1) + (-1)\times(-2)\times(-2) + 1\times(-2)\times(-1) \\ &\quad - 1\times(-1)\times(-2) - (-2)\times(-2)\times(-1) - (-1)\times(-2)\times(-1) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

同様に，

$$\begin{aligned} D_{24} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1\times(-1)\times(-1) + 3\times(-2)\times(-2) + 2\times(-2)\times(-1) \\ &\quad - 2\times(-1)\times(-2) - 1\times(-2)\times(-1) - 3\times(-2)\times(-1) \\ &= \mathbf{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{34} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1\times(-1)\times(-1) + 3\times1\times(-2) + 2\times(-2)\times(-1) \\ &\quad - 2\times(-1)\times(-2) - 1\times1\times(-1) - 3\times(-2)\times(-1) \\ &= \mathbf{-10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{44} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 1\times(-1)\times(-2) + 3\times1\times(-2) + 2\times(-2)\times(-1) \\ &\quad - 2\times(-1)\times(-2) - 1\times1\times(-1) - 3\times(-2)\times(-2) \\ &= \mathbf{-15} \end{aligned}$$

i 行 j 列の成分を，a_{ij} とすると，行列式 $|A|$ は次のように表せるので，それぞれの値をあてはめて，

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{(1+4)}a_{14}D_{14} + (-1)^{(2+4)}a_{24}D_{24} + (-1)^{(3+4)}a_{34}D_{34} + (-1)^{(4+4)}a_{44}D_{44} \\ &= (-1)^5\times(-2)\times0 + (-1)^6\times3\times5 + (-1)^7\times(-1)\times(-10) + (-1)^8\times(-1)\times(-15) \\ &= \mathbf{20} \end{aligned}$$