

## 【コース ID : 45】 線形代数 II

## 45.9 行列式の計算

## 45.9.1 行列式の計算

## 問題 001 (バリエーション No.1)

次の順列

$$(4, 1, 2, 3)$$

が偶順列か奇順列かを調べ、偶順列なら ①, 奇順列なら ② を解答欄  ヘマークせよ.基本順列  $(1, 2, 3, 4)$  になるように 2 つの数を入れ替えていくと,

$$\begin{aligned}(4, 1, 2, 3) &\Rightarrow (1, 4, 2, 3) && \cdots 4 \text{ と } 1 \text{ を入れ替え } 1 \text{ 回目} \\ &\Rightarrow (1, 2, 4, 3) && \cdots 4 \text{ と } 2 \text{ を入れ替え } 2 \text{ 回目} \\ &\Rightarrow (1, 2, 3, 4) && \cdots 4 \text{ と } 3 \text{ を入れ替え } 3 \text{ 回目}\end{aligned}$$

奇数回入れ替えたので、奇順列

【答】 ①

## 問題 001 (バリエーション No.16)

次の順列

$$(4, 2, 5, 1, 3)$$

が偶順列か奇順列かを調べ、偶順列なら ①, 奇順列なら ② を解答欄  ヘマークせよ.基本順列  $(1, 2, 3, 4, 5)$  になるように 2 つの数を入れ替えていくと,

$$\begin{aligned}(4, 2, 5, 1, 3) &\Rightarrow (1, 2, 5, 4, 3) && \cdots 4 \text{ と } 1 \text{ を入れ替え } 1 \text{ 回目} \\ &\Rightarrow (1, 2, 3, 4, 5) && \cdots 5 \text{ と } 3 \text{ を入れ替え } 2 \text{ 回目}\end{aligned}$$

偶数回入れ替えたので、偶順列

【答】 ①

## 問題 002 (バリエーション No.2)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{\text{アイウ}} \text{ である.}$$

1 行 1 列に数字を残して、1 列のそれ以外が全て 0 になるように行を入れ替えながら計算を進める。  
入れ替えるごとに符号が変わるので、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} && \text{(1 行目と 4 行目を入れ替えて, 符号をかえる)} \\ &= (-1) \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} && \text{(1 行 1 列の成分を前に出す)} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} && \text{(1 行目と 3 行目を入れ替えて, 符号をかえる)} \\ &= 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} && \text{(1 行 1 列の成分を前に出す)} \\ &= (-2) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} && \text{(1 行目と 2 行目を入れ替えて, 符号をかえる)} \\ &= (-2) \times 3 \times 4 && \text{(1 行 1 列の成分を前に出す)} \\ &= -24 \end{aligned}$$

(次のような形にするために、

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

何回入れ替えが必要かを考えて、 $1 \times 2 \times 3 \times 4$  の符号を決めても良い。この問題では、入れ替えが奇数回なので符号がマイナスになる。)

**【答】**     $-24$

## 問題 003 (バリエーション No.6)

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \boxed{\text{アイ}} \text{ である.}$$

1 行 1 列に数字を残して, 1 列のそれ以外が全て 0 になるように行を入れ替えながら計算を進める.  
1 度入れ替えるごとに符号が変わるので,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} && \text{(1 行目と 2 行目入れ替え, 符号替え)} \\ &= (-1) \times 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} && \text{(1 行 1 列の成分を前に出す)} \\ &= (-1) \times (-1) \times \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} && \text{(1 行 1 列の成分を前に出す)} \\ &= (-2) \times (-2) - 2 \times 3 \\ &= -2 \end{aligned}$$

【答】 -2

## 問題 003 (バリエーション No.11)

$$\begin{vmatrix} -4 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{\text{アイウ}} \text{ である.}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -4 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} && \text{(1 列目と 4 列目を入れ替え, 符号替え)} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} && \text{(2 列目と 3 列目を入れ替え, 符号替え)} \\ &= - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} && \text{(1 行目と 4 行目を入れ替え, 符号替え)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} \quad (\text{2行目と3行目を入れ替え, 符号替え}) \\
 &= 3 \times 1 \times \{5 \times (-4) - (-4) \times (-3)\} \\
 &= -96
 \end{aligned}$$

【答】 -96

問題 004 (バリエーション No.1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{\text{ア}} \text{ である.}$$

1 列目は, 1 行目以外は全て 0 なので,

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} &= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \times 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{同様に 1 行 1 列の成分を前に出す}) \\
 &= (-1) \times 2 - (-4) \times 2 \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

【答】 6