［コース ID：45］　線形代数 II

45.5　消去法

45.5.1　消去法

問題 001（バリエーション No.1）

連立方程式

$$\begin{cases} x+7y &= 42 \\ x+y &= 0 \end{cases}$$

を消去法で解いてみよう．
与えられた連立方程式を拡大係数行列で表すと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & 42 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

となる．行基本変形を行い，上三角行列へ変換することで

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & 42 \\ \boxed{\text{ア}} & -6 & \boxed{\text{イウエ}} \end{array}\right)$$

を得る．従って，求める解は

$$x = \boxed{\text{オカ}}\ ,\quad y = \boxed{\text{キ}}$$

である．

2 行目から 1 行目を引くと，

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & 42 \\ 0 & -6 & -42 \end{array}\right)$$

2 行目 より，

$$-6y = -42$$
$$y = \mathbf{7}$$

1 行目に代入して，

$$x + 7 \times 7 = 42$$
$$x = 42 - 49$$
$$x = \mathbf{-7}$$

【答】　$\boldsymbol{x = -7}$ **,** $\boldsymbol{y = 7}$

問題 002（バリエーション No.1）

連立方程式

$$\begin{cases} x-3y-3z &= 19 \\ 5x-2y-2z &= 30 \\ -2x+3y-z &= -15 \end{cases}$$

を消去法で解いてみよう．
与えられた連立方程式を拡大係数行列で表すと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & 19 \\ 5 & -2 & -2 & 30 \\ -2 & 3 & -1 & -15 \end{array}\right)$$

行基本変形により

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & 19 \\ 0 & 13 & \boxed{\text{アイ}} & \boxed{\text{ウエオ}} \\ 0 & -3 & \boxed{\text{カキ}} & \boxed{\text{クケ}} \end{array}\right)$$

さらに変形して，上三角行列

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & 19 \\ 0 & 13 & \boxed{\text{アイ}} & \boxed{\text{ウエオ}} \\ 0 & 0 & -4 & \boxed{\text{コ}} \end{array}\right)$$

を得る．従って，求める解は

$$x = \boxed{\text{サ}}, \quad y = \boxed{\text{シス}}, \quad z = \boxed{\text{セソ}}$$

である．

2 行目から 1 行目 $\times 5$ を引き，3 行目に 1 行目 $\times 2$ をたすと，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & 19 \\ 5-1\times 5 & -2-(-3)\times 5 & -2-(-3)\times 5 & 30-19\times 5 \\ -2+1\times 2 & 3+(-3)\times 2 & -1+(-3)\times 2 & -15+19\times 2 \end{array}\right)$$

より，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & 19 \\ 0 & 13 & \mathbf{13} & \mathbf{-65} \\ 0 & -3 & \mathbf{-7} & \mathbf{23} \end{array}\right)$$

3 行目に 2 行目 $\times\dfrac{3}{13}$ を加えると，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & 19 \\ 0 & 13 & 13 & -65 \\ 0 & -3+13\times\dfrac{3}{13} & -7+13\times\dfrac{3}{13} & 23+(-65)\times\dfrac{3}{13} \end{array}\right)$$

よって，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & 19 \\ 0 & 13 & \mathbf{13} & \mathbf{-65} \\ 0 & 0 & -4 & \mathbf{8} \end{array}\right)$$

3 行目 より，

$$\begin{aligned} -4z &= 8 \\ z &= \mathbf{-2} \end{aligned}$$

2 行目に代入して，

$$\begin{aligned} 13y + 13 \times (-2) &= -65 \\ y - 2 &= -5 \\ y &= \mathbf{-3} \end{aligned}$$

1 行目に代入して，

$$\begin{aligned} x - 3 \times (-3) - 3 \times (-2) &= 19 \\ x + 15 &= 19 \\ x &= \mathbf{4} \end{aligned}$$

$$\therefore\ x = \mathbf{4}\ ,\ y = \mathbf{-3}\ ,\ z = \mathbf{-2}$$

問題 003（バリエーション No.1）

連立方程式

$$\begin{cases} -3x+5y+2z &= -28 \\ x-y+4z &= 2 \\ -4x+5y+z &= -29 \end{cases}$$

を消去法で解いてみよう．
与えられた連立方程式を拡大係数行列で表すと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 5 & 2 & -28 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ -4 & 5 & 1 & -29 \end{array}\right)$$

行基本変形により

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 2 & -28 \\ -4 & 5 & 1 & -29 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & \boxed{\text{アイ}} & \boxed{\text{ウエオ}} \\ 0 & 1 & \boxed{\text{カキ}} & \boxed{\text{クケコ}} \end{array}\right)$$

さらに変形して，上三角行列

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & \boxed{\text{アイ}} & \boxed{\text{ウエオ}} \\ 0 & 0 & 10 & \boxed{\text{サシス}} \end{array}\right)$$

を得る．従って，求める解は

$$x = \boxed{\text{セ}},\quad y = \boxed{\text{ソタ}},\quad z = \boxed{\text{チツ}}$$

である．

まず，1 行 1 列の成分を 1 にしたいので，2 行目と 1 行目 を入れ替えた後，2 行目に 1 行目 ×3 を加えて，3 行目に 1 行目 ×4 を加えて，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 2 & -28 \\ -4 & 5 & 1 & -29 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 2 \\ -3+1\times 3 & 5+(-1)\times 3 & 2+4\times 3 & -28+2\times 3 \\ -4+1\times 4 & 5+(-1)\times 4 & 1+4\times 4 & -29+2\times 4 \end{array}\right)$$

より，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & \mathbf{14} & \mathbf{-22} \\ 0 & 1 & \mathbf{17} & \mathbf{-21} \end{array}\right)$$

さらに，3 行目から 2 行目 $\times\frac{1}{2}$ を引くと，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 14 & -22 \\ 0 & 1-2\times\frac{1}{2} & 17-14\times\frac{1}{2} & -21-(-22)\times\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

よって，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & \mathbf{14} & \mathbf{-22} \\ 0 & 0 & 10 & \mathbf{-10} \end{array}\right)$$

3 行目 より，

$$\begin{aligned} 10z &= -10 \\ z &= \mathbf{-1} \end{aligned}$$

2 行目に代入して，

$$\begin{aligned} 2y + 14 \times (-1) &= -22 \\ 2y &= -22 + 14 \\ y &= \mathbf{-4} \end{aligned}$$

1 行目に代入して，

$$\begin{aligned} x - (-4) + 4 \times (-1) &= 2 \\ x &= \mathbf{2} \end{aligned}$$

$$\therefore\ x = \mathbf{2}\ ,\ y = \mathbf{-4}\ ,\ z = \mathbf{-1}$$

問題 004（バリエーション No.1）

連立方程式

$$\left\{\begin{array}{rcr} -x+5y-4z &=& 23 \\ -x-y+5z &=& -4 \\ x+4y+3z &=& 5 \end{array}\right.$$

を消去法で解いてみよう．
与えられた連立方程式を拡大係数行列で表すと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & -4 & 23 \\ -1 & -1 & 5 & -4 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

行基本変形により

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 5 & -4 \\ -1 & 5 & -4 & 23 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イ}} \\ 0 & 9 & \boxed{\text{ウエ}} & \boxed{\text{オカ}} \end{array}\right)$$

さらに変形して，上三角行列

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イ}} \\ 0 & 0 & -25 & \boxed{\text{キク}} \end{array}\right)$$

を得る．従って，求める解は
である．

連立方程式を最初に拡大係数行列で表わした形から，1 行 1 列の成分を 1 にしたいので，3 行目と 1 行目を入れ替えた後，2 行目・3 行目に 1 行目をそれぞれ加えて，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 5 & -4 \\ -1 & 5 & -4 & 23 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 5 \\ -1+1 & -1+4 & 5+3 & -4+5 \\ -1+1 & 5+4 & -4+3 & 23+5 \end{array}\right)$$

より，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & \mathbf{8} & \mathbf{1} \\ 0 & 9 & \mathbf{-1} & \mathbf{28} \end{array}\right)$$

さらに，3 行目から 2 行目 $\times 3$ を引くと，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 9-3\times 3 & -1-8\times 3 & 28-1\times 3 \end{array}\right)$$

よって，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & \mathbf{8} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & -25 & \mathbf{25} \end{array}\right)$$

3 行目 より，

$$\begin{aligned} -25z &= 25 \\ z &= \mathbf{-1} \end{aligned}$$

2 行目に代入して，

$$\begin{aligned} 3y + 8 \times (-1) &= 1 \\ 3y &= 1 + 8 \\ y &= \mathbf{3} \end{aligned}$$

1 行目に代入して，

$$\begin{aligned} x + 4 \times 3 + 3 \times (-1) &= 5 \\ x &= 5 - 9 \\ x &= \mathbf{-4} \end{aligned}$$

$$\therefore\ x = \mathbf{-4}\ ,\ y = \mathbf{3}\ ,\ z = \mathbf{-1}$$