［コース ID：45］　線形代数 II

45.12　行列式と逆行列

45.12.1　行列式と逆行列

問題 001（バリエーション No.1）

行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ について，

$|A| =$ $\boxed{\text{アイ}}$ である。また、この行列 A の余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} * & \boxed{\text{ウエ}} & * \\ * & \boxed{\text{オカ}} & * \\ * & * & \boxed{\text{キ}} \end{pmatrix}$$

である，従って，A の逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ク}} & \boxed{\text{ケ}} & \boxed{\text{コ}} \\ * & * & \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}} \\ * & \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}} & * \end{pmatrix}$$

となる．
（ただし，$*$ の箇所は解答する必要はない）

行列式の性質を利用して，2 行目以下の 1 列目を 0 に変形して，計算すると

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{（1 行目の } - \text{ を前に出して）}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -11 \end{vmatrix} \quad \text{（2 行目から 1 行目} \times 2 \text{ を引き，3 行目に 1 行目} \times 3 \text{ を加える）}$$

$$= -1 \times \{(-1) \times (-11) - 3 \times 7\}$$

$$= \mathbf{10}$$

A の成分を次のように表すと

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\widetilde{A}$ は，

$$\begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & -(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

と表せるので，

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= \begin{pmatrix} 1 \times (-2) - (-3) \times 4 & -\{(-1) \times (-2) - 3 \times 4\} & (-1) \times (-3) - 3 \times 1 \\ -\{2 \times (-2) - (-3) \times (-3)\} & (-1) \times (-2) - 3 \times (-3) & -\{(-1) \times (-3) - 3 \times 2\} \\ 2 \times 4 - 1 \times (-3) & -\{(-1) \times 4 - (-1) \times (-3)\} & (-1) \times 1 - (-1) \times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & \mathbf{10} & 0 \\ 13 & \mathbf{11} & 3 \\ 11 & 7 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

従って，逆行列 A^{-1} は，

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|}\widetilde{A} \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 13 & 11 & 3 \\ 11 & 7 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \frac{13}{10} & \frac{11}{10} & \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} \\ \frac{11}{10} & \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問題 002（バリエーション No.1）

行列 $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ について，

$|A| = \boxed{\text{アイ}}$ である。また、この行列 A の余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ \boxed{\text{ウエ}} & * & \boxed{\text{オカ}} \\ * & * & \boxed{\text{キク}} \end{pmatrix}$$

である，従って，A の逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ケ}} & * & \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \\ \boxed{\text{シ}} & * & * \\ \boxed{\text{ス}} & * & \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \end{pmatrix}$$

となる．
（ただし，$*$ の箇所は解答する必要はない）

行列式の性質を利用して，2 行目以下の 1 列目を 0 に変形して，計算すると

$$\begin{aligned}
|A| &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} && \text{（1 行目と 3 行目を入れ替えて）} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 11 & -7 \end{vmatrix} && \text{（2 行目に 1 行目} \times 2 \text{ を加え,3 行目に 1 行目} \times 3 \text{ を加える）} \\
&= -1 \times \{9 \times (-7) - (-6) \times 11\} \\
&= \mathbf{-3}
\end{aligned}$$

$\widetilde{A}$ は,

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} &= \begin{pmatrix} 3 \times (-2) - (-2) \times 3 & -\{2 \times (-2) - (-1) \times 3\} & 2 \times (-2) - (-1) \times 3 \\ -\{(-2) \times (-2) - (-2) \times 1\} & (-3) \times (-2) - (-1) \times 1 & -\{(-3) \times (-2) - (-1) \times (-2)\} \\ (-2) \times 3 - 3 \times 1 & -\{(-3) \times 3 - 2 \times 1\} & (-3) \times 3 - 2 \times (-2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \mathbf{-6} & 7 & \mathbf{-4} \\ -9 & 11 & \mathbf{-5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

従って，逆行列 A^{-1} は,

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{|A|}\widetilde{A} \\
&= \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & 7 & -4 \\ -9 & 11 & -5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\frac{1}{3} & \mathbf{\frac{1}{3}} \\ \mathbf{2} & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ \mathbf{3} & -\frac{11}{3} & \mathbf{\frac{5}{3}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

問題 003（バリエーション No.1）

行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，

$|A| = \boxed{\text{アイ}}$ である。また、この行列 A の余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$
\widetilde{A} = \begin{pmatrix} * & * & \boxed{\text{ウ}} \\ \boxed{\text{エオ}} & * & * \\ * & \boxed{\text{カキ}} & * \end{pmatrix}
$$

である，従って，A の逆行列 A^{-1} は

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} * & \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}} & * \\ * & * & \dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}} \\ \dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}} & * & * \end{pmatrix}
$$

となる．
（ただし，$*$ の箇所は解答する必要はない）

行列式の性質を利用して，2 行目以下の 1 列目を 0 に変形して，計算すると

$$
\begin{aligned}
|A| &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{（1 行目と 3 行目を入れ替えて）} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{（2 行目から 1 行目} \times 2 \text{ を引き,2 行目に 1 行目} \times 2 \text{ を加える）} \\
&= -1 \times \{2 \times 1 - (-4) \times (-3)\} \\
&= \mathbf{10}
\end{aligned}
$$

$\widetilde{A}$ は，

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2\times1-(-2)\times0 & -\{(-3)\times1-(-1)\times0\} & (-3)\times(-2)-(-1)\times2 \\ -\{2\times1-(-2)\times1\} & (-2)\times1-(-1)\times1 & -\{(-2)\times(-2)-(-1)\times2\} \\ 2\times0-2\times1 & -\{(-2)\times0-(-3)\times1\} & (-2)\times2-(-3)\times2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & \mathbf{8} \\ \mathbf{-4} & -1 & -6 \\ -2 & \mathbf{-3} & 2 \end{pmatrix}$$

従って，逆行列 A^{-1} は，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -4 & -1 & -6 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} & \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{5}} \\ \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{5}} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

問題 004（バリエーション No.1）

行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ について，

$|A| = \boxed{\text{アイウ}}$ である。また、この行列 A の余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} * & \boxed{\text{エオ}} & * \\ \boxed{\text{カ}} & * & * \\ * & * & \boxed{\text{キク}} \end{pmatrix}$$

である，従って，A の逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}} \\ \dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}} & * & * \\ * & * & \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}} \end{pmatrix}$$

となる．
（ただし，$*$ の箇所は解答する必要はない）

行列式の性質を利用して，2 行目以下の 1 列目を 0 に変形して，計算すると

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{（1 行目の − 前に出して）}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & -9 & -5 \end{vmatrix} \qquad \text{（2 行目に 1 行目} \times 2 \text{ を加え, 2 行目から 1 行目} \times 2 \text{ を引く）}$$

$$= -1 \times \{6 \times (-5) - 9 \times (-9)\}$$

$$= \mathbf{-51}$$

$\widetilde{A}$ は,

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 \times 1 - 3 \times (-3) & -\{(-3) \times 1 - (-3) \times (-3)\} & (-3) \times 3 - (-3) \times 0 \\ -\{(-2) \times 1 - 3 \times 2\} & (-1) \times 1 - (-3) \times 2 & -\{(-1) \times 3 - (-3) \times (-2)\} \\ (-2) \times (-3) - 0 \times 2 & -\{(-1) \times (-3) - (-3) \times 2\} & (-1) \times 0 - (-3) \times (-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & \mathbf{12} & -9 \\ \mathbf{8} & 5 & 9 \\ 6 & -9 & \mathbf{-6} \end{pmatrix}$$

従って，逆行列 A^{-1} は,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$$

$$= \frac{1}{-51}\begin{pmatrix} 9 & 12 & -9 \\ 8 & 5 & 9 \\ 6 & -9 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{-3}{17} & \dfrac{-4}{17} & \mathbf{\dfrac{3}{17}} \\ \mathbf{\dfrac{-8}{51}} & \dfrac{-5}{51} & \dfrac{-3}{17} \\ \dfrac{-2}{17} & \dfrac{3}{17} & \mathbf{\dfrac{2}{17}} \end{pmatrix}$$