［コース ID：46］　線形代数 III

46.1　線形変換とは

46.1.1　線形変換とは

問題 001（バリエーション No.1）

行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ で表される線形変換による点 $\mathrm{A}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の像 A' は

$$\mathrm{A}'\begin{pmatrix} \boxed{\text{アイ}} \\ \boxed{\text{ウエ}} \end{pmatrix}$$

である.

行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ により A を写すと

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

より $\mathrm{A}'\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ である.

【答】　$\mathbf{A}'\begin{pmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

問題 002（バリエーション No.30）

ある線形変換 f により

点 $\mathrm{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は点 $\mathrm{A}'\begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix}$ に写され,

点 $\mathrm{B}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は点 $\mathrm{B}'\begin{pmatrix} -7 \\ 10 \end{pmatrix}$ に写されるならば, この線形変換 f を表す行列 P は

$$P = \begin{pmatrix} \boxed{\text{アイ}} & \boxed{\text{ウエ}} \\ \boxed{\text{オ}} & \boxed{\text{カ}} \end{pmatrix}$$

となる.

$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると仮定から

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

となる．2 つの連立方程式

$$\begin{cases} 2a+b=-5 \\ a+2b=-7 \end{cases}$$

および

$$\begin{cases} 2c+d=11 \\ c+2d=10 \end{cases}$$

を解くことで $a=-1,\ b=-3,\ c=4,\ d=3$ を得る．よって

$$P=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

である．

【答】 $\boldsymbol{P=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}$

問題 003（バリエーション No.3）

座標平面上の点 A を直線 $y=x$ に関して対称な点 A$'$ に写す変換 f を表す行列 P は

$$P=\begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イ}} \\ \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}$$

である．

この変換により, 点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に, 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ にそれぞれ写されるので

$P=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．$a=0,\ b=1,\ c=1,\ d=0$ より

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である

【答】 $\boldsymbol{P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$

問題 004（バリエーション No.1）

直線 $y=2x$ に関する対称移動は線形変換である．この変換 f を表す行列を求めてみよう．

f を表す行列を A とすると, f によって, 直線 $y=2x$ 上の点 $\begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\text{ア}} \end{pmatrix}$ はそれ自身に移るので,

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\text{ア}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\text{ア}} \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

また, 原点を通り, $y=2x$ に垂直な直線 $y=\dfrac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}x$ 上の点 $\begin{pmatrix} \boxed{\text{オカ}} \\ 1 \end{pmatrix}$ は, f により原点に関して対称な点 $\begin{pmatrix} \boxed{\text{キ}} \\ \boxed{\text{クケ}} \end{pmatrix}$ に移るから,

$$A\begin{pmatrix} \boxed{\text{オカ}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{キ}} \\ \boxed{\text{クケ}} \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

以上のことから, $A=\dfrac{1}{\boxed{\text{コ}}}\begin{pmatrix} \boxed{\text{サシ}} & \boxed{\text{ス}} \\ \boxed{\text{セ}} & \boxed{\text{ソ}} \end{pmatrix}$ であることがわかる.

点 $\begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix}$ が直線 $y=2x$ 上の点であるとき $x=1$ のとき $y=2$ なので $y'=2$ である．よって

$$A\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

また原点を通り, $y=2x$ に垂直な直線は $\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x}$ であり, 点 $\begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix}$ がこの直線上にあるとき $y=1$ のとき $x=-2$ であるから $x'=-2$ である.

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は f により原点に関して対称な点 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に移るので

$$A\begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

が成り立つ．$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると, 以上のことから

$$\begin{cases} a+2b=1 \\ c+2d=2 \end{cases}$$

かつ

$$\begin{cases} -2a+b=2 \\ -2c+d=-1 \end{cases}$$

となるのでこれらを解くことで $a=-\dfrac{3}{5},\ b=\dfrac{4}{5},\ c=\dfrac{4}{5},\ d=\dfrac{3}{5}$ を得る．よって

$$A=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

である.