［コース ID：46］　線形代数 III

46.4　回転移動

46.4.1　回転移動

問題 001（バリエーション No.1）

座標平面上の原点 O を中心とする 30° の回転移動による, 点 $(1,1)$ の像の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{アイ}}+\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}},\ \frac{\boxed{\text{オ}}+\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}\right)$$

である.

原点 O を中心とする角度 θ の回転移動は線形変換であり, この変換は行列

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

で表される. よって 30° の回転移動を表す行列は

$$\begin{pmatrix}\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ\\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

であるから, $(1,1)$ の像は

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1+\sqrt{3}\\ 1+\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

となるので, その座標は $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ である.

【答】 $\left(\dfrac{\mathbf{-1+\sqrt{3}}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{1+\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}\right)$

問題 002（バリエーション No.1）

座標平面上に正三角形があり, その重心は原点 O に一致している. この正三角形の 1 つの頂点の座標が $(2,1)$ であるとき, 残りの 2 つの頂点のうち, y 座標が正であるものの座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{アイ}}-\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}},\ \frac{\boxed{\text{オカ}}+\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

である.

重心が原点に一致していることから, 残りの 2 頂点は, 頂点 $(2,1)$ をそれぞれ 120°, 240° だけ回転移動することで得られる. よって残りの 2 つの頂点は

$$\begin{pmatrix}\cos 120^\circ & -\sin 120^\circ\\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2-\sqrt{3}\\ -1+2\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cos 240^\circ & -\sin 240^\circ\\ \sin 240^\circ & \cos 240^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2+\sqrt{3}\\ -1-2\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

であり, これらのうち, y 座標が正であるのは

$$\left(\frac{-2-\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1+2\sqrt{3}}{2}\right)$$

である.

【答】 $\left(\boldsymbol{\frac{-2-\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1+2\sqrt{3}}{2}}\right)$

問題 003（バリエーション No.1）

座標平面上に正八角形があり, その外接円の中心は原点 O に一致している. この正八角形の 1 つの頂点の座標が $(2,1)$ であるとき, 残りの頂点のうちで第 2 象限にあるものは

$$(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウ}})$$

および

$$\left(\frac{\boxed{\text{エオ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}},\ \frac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

の 2 つである.

外接円の中心が原点 O に一致していることから, この正八角形のその他の頂点は, 点 $(2,1)$ を $\dfrac{360^\circ}{8}=45^\circ$ づつ回転移動することで得られる.

$$\begin{pmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

より, この正八角形のその他の頂点を順次計算していくと

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 \\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\quad (第 1 象限)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 \\ 2\end{pmatrix}\quad (第 2 象限)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 \\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\quad (第 2 象限)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 \\ -1\end{pmatrix}\quad (第 3 象限)$$

となり, 第 2 象限にあるものは $(-1,2)$ と $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ の 2 点であることが分かる.

【答】 $\boldsymbol{(-1,2)},\ \left(\boldsymbol{\frac{-3\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$

問題 004（バリエーション No.1）

座標平面上の原点 O を中心とする 30° の回転移動による, 直線 $y=x+1$ の像の方程式は

$$\left(\boxed{\text{ア}}+\sqrt{\boxed{\text{イ}}}\right)x+\left(\boxed{\text{ウ}}-\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\right)y+2=0$$

である.

原点を中心とする 30° の回転移動を表す行列は

$$\begin{pmatrix}\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

である. また, 直線 $y=x+1$ 上の点は媒介変数 t を用いて $(t,\ t+1)$ と表せるので, その像は

$$\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t \\ t+1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\left(-1+\sqrt{3}\right)t-1 \\ \left(1+\sqrt{3}\right)t+\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

と表せる.

$$\begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}t-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}t+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

から t を消去すると

$$\left(1+\sqrt{3}\right)x-\left(-1+\sqrt{3}\right)y=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{3-\sqrt{3}}{2}=-2$$

となるので, 像の方程式は

$$\left(1+\sqrt{3}\right)x+\left(1-\sqrt{3}\right)y+2=0$$

である.

【答】 $\boldsymbol{\left(1+\sqrt{3}\right)x+\left(1-\sqrt{3}\right)y+2=0}$

問題 005（バリエーション No.3）

以下の設問において, 空欄 $\boxed{\text{ア}}$ は後の選択肢から適するものを選び, その番号をマークせよ.

xyz 空間内の点 $\mathrm{A}(1,1,1)$ を $\boxed{\text{ア}}$ のまわりに 45° 回転させた点 A' の座標は

$$\mathrm{A}'\left(1,\ \boxed{\text{イ}},\ \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\right)$$

である.

$\boxed{\text{ア}}$ の選択肢：

⓪ x 軸
① y 軸
② z 軸

回転する前と後で x 座標が変わっていないことから, この変換は x 軸のまわりの回転移動である. 空間内において, x 軸のまわりに 角度 θ だけ回転させる変換は行列で表すと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となるので, 点 A を 45° だけ回転させた点 A′ の座標は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ 0 & \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となる.

【答】　$\boldsymbol{\left(1, 0, \sqrt{2}\right)}$