［コース ID：46］　線形代数 III

46.3　逆変換と合成変換

46.3.1　逆変換と合成変換

問題 001（バリエーション No.1）

行列 $\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ の表す線形変換を, それぞれ f, g とする.
次のような変換による, $\mathrm{P}(5,4)$ の像は, それぞれ,

$$f^{-1}(\mathrm{P}) = (\ \boxed{アイウ}\ ,\ \ \boxed{エオカ}\ )$$

$$g^{-1}(\mathrm{P}) = (\ \boxed{\ キ\ }\ ,\ \ \boxed{\ ク\ }\ )$$

$$(f \circ g)^{-1}(\mathrm{P}) = (\ \boxed{ケコサ}\ ,\ \ \boxed{シスセ}\ )$$

である.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ とすると, 線形変換 f^{-1}, g^{-1}, $(f \circ g)^{-1}$ を表す行列はそれぞれ A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である. ここで

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\ B^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 45 \\ 8 & 19 \end{pmatrix}$$

であるから, 各変換による P の像はそれぞれ

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -56 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 45 \\ 8 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 275 \\ 116 \end{pmatrix}$$

よって

$$f^{-1}(\mathrm{P}) = (\mathbf{-56},\ \mathbf{-13})$$

$$g^{-1}(\mathrm{P}) = (\mathbf{1},\ \mathbf{1})$$

$$(f \circ g)^{-1}(\mathrm{P}) = (\mathbf{275},\ \mathbf{116})$$

問題 002（バリエーション No.1）

2 つの行列 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す線形変換をそれぞれ f, g とする.
合成変換 $f \circ g$ が恒等変換であるならば,
$a = \boxed{\ ア\ }$, $b = \boxed{\ イ\ }$, $c = \boxed{\ ウ\ }$, $d = \boxed{\ エ\ }$ である.

恒等変換を表す行列は単位行列 E であるので, $f \circ g$ が恒等変換ならば

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = E$$

が成り立つ. 両辺の左側から $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ をかけることで

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} E = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

よって $a = 1,\ b = 1,\ c = 2,\ d = 3$ である.

【答】 $\boldsymbol{a = 1,\ b = 1,\ c = 2,\ d = 3}$

問題 003（バリエーション No.1）

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ の表す線形変換により, 点 $(9, -5)$ に移る点は ($\boxed{\text{アイウ}}$, $\boxed{\text{エオ}}$) である.

求める点の座標を (x, y) とすると, (x, y) が $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ の表す線形変換により $(9, -5)$ に移ることから

$$\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つ, 両辺の左側から $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$ をかけることで

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 22 \end{pmatrix}$$

よって $x = -13,\ y = 22$ である.

【答】 $\boldsymbol{(-13, 22)}$

問題 004（バリエーション No.1）

行列 $\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$ の表す線形変換を f とする.

ある図形 G が f により直線 $y = 2x + 2$ に移されるならば, この図形 G の方程式は

$$6x - \boxed{\text{ア}}\,y - \boxed{\text{イ}} = 0$$

である.

直線 $y = 2x + 2$ 上の点は媒介変数 t を用いて $(t, 2t + 2)$ と表せる. G 上の点を (x, y) とすると, G の f による像が直線 $y = 2x + 2$ であることから

$$\begin{pmatrix} t \\ 2t + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つ．両辺の左側から $\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}^{-1}$ をかければ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 2t+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2t+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7t-16 \\ -6t-14 \end{pmatrix}$$

となり, G の媒介変数表示が得られる．

$$\begin{cases} x = -7t - 16 \\ y = -6t - 14 \end{cases}$$

から t を消去することで

$$6x - 7y = -16 \cdot 6 - (-14) \cdot 7 = 2$$

よって G の方程式は $6x - 7y - 2 = 0$ である．

【答】 $\boldsymbol{6x - 7y - 2 = 0}$