［コース ID：46］　線形代数 III

46.6　固有値と固有ベクトル

46.6.1　固有値と固有ベクトル

問題 001（バリエーション No.1）

行列 $\begin{pmatrix} -12 & 10 \\ -11 & 15 \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2\ (\lambda_1 < \lambda_2)$ およびそれらに対する固有ベクトル $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ は,

$\lambda_1 = \boxed{\text{アイ}}$, $\vec{v}_1 = c_1 \begin{pmatrix} \boxed{\text{ウ}} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \boxed{\text{エオ}}$, $\vec{v}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ \boxed{\text{カキ}} \end{pmatrix}$

(ただし, $c_1,\ c_2$ は 0 でない任意の実数) である.

$A = \begin{pmatrix} -12 & 10 \\ -11 & 15 \end{pmatrix}$, E を単位行列として $|A - \lambda E| = 0$ とすると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -12-\lambda & 10 \\ -11 & 15-\lambda \end{vmatrix} &= (-12-\lambda)(15-\lambda) + 110 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 70 = (\lambda+7)(\lambda-10) = 0 \end{aligned}$$

$\lambda_1 < \lambda_2$ より, $\lambda_1 = -7,\ \lambda_2 = 10$ である.

$\lambda = -7$ のとき, $\begin{pmatrix} -12+7 & 10 \\ -11 & 15+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -11 & 22 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -11 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると $x = 2y$ となるので, 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(y \neq 0)$ である.

$\lambda = 10$ のとき, $\begin{pmatrix} -12-10 & 10 \\ -11 & 15-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 10 \\ -11 & 5 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} -22 & 10 \\ -11 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると $11x = 5y$ となるので, 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} \frac{5}{11}y \\ y \end{pmatrix} = y' \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$ $(y' \neq 0)$ である.

(見やすくするため $\dfrac{1}{11}y$ を y' と置き直したことに注意)

まとめると

$$\lambda_1 = -7 \text{ のとき } \vec{v}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \lambda_1 = 10 \text{ のとき } \vec{v}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} \quad (c_1,\ c_2 \neq 0)$$

である.

問題 002（バリエーション No.1）

行列 $\begin{pmatrix} 12 & -11 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2\ (\lambda_1 < \lambda_2)$ およびそれらに対する固有ベクトル $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ は,

$\lambda_1 = \boxed{\text{ア}}$, $\vec{v}_1 = c_1 \begin{pmatrix} \boxed{\text{イ}} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \boxed{\text{ウエ}}$, $\vec{v}_2 = c_2 \begin{pmatrix} \boxed{\text{オカ}} \\ -1 \end{pmatrix}$

(ただし, $c_1,\ c_2$ は 0 でない任意の実数) である.

$A = \begin{pmatrix} 12 & -11 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ として $|A - \lambda E| = 0$ とすると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 12-\lambda & -11 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= (12-\lambda)(2-\lambda) - 11 \\ &= \lambda^2 - 14\lambda + 13 = (\lambda - 1)(\lambda - 13) = 0 \end{aligned}$$

$\lambda_1 < \lambda_2$ より, $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 13$ である.

$\lambda = 1$ のとき, $\begin{pmatrix} 12-1 & -11 \\ -1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -11 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} 11 & -11 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると $x = y$ となるので, 固有ベクトルは $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c_1 \neq 0)$ である.

$\lambda = 13$ のとき, $\begin{pmatrix} 12-13 & -11 \\ -1 & 2-13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ -1 & -11 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} -1 & -11 \\ -1 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると $x = -11y$ となるので, 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -11y \\ y \end{pmatrix} = y' \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(y' \neq 0)$ である.

まとめると

$$\lambda_1 = 1 \ \text{ のとき }\ \vec{v}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \lambda_1 = 13 \ \text{ のとき }\ \vec{v}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1,\ c_2 \neq 0)$$

である.

問題 003（バリエーション No.1）

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\ (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ およびそれらに対する固有ベクトル $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3$ は,

$\lambda_1 = \boxed{アイ}$, $\vec{v}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{ウエ} \\ \boxed{オ} \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \boxed{カ}$, $\vec{v}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{キ} \\ \boxed{クケ} \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = \boxed{コ}$, $\vec{v}_3 = c_3 \begin{pmatrix} \boxed{サ} \\ 2 \\ \boxed{シス} \end{pmatrix}$

(ただし, $c_1,\ c_2,\ c_3$ は 0 でない任意の実数) である.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ として $|A - \lambda E| = 0$ とすると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda) - 8 - 2(2-\lambda) - (-4\lambda) \\ &= -(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda) + 6\lambda - 12 \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12 &= -\lambda^2(\lambda - 3) + 4(\lambda - 3) \\ &= (\lambda - 3)(-\lambda^2 + 4) \\ &= -(\lambda + 2)(\lambda - 3)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

より, 固有値は $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$ である.

$\lambda = -2$ のとき, $\begin{pmatrix} 1+2 & 2 & -1 \\ 2 & 2+2 & 2 \\ -2 & 0 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \end{cases}$$

この式から $z=x,\ y=-x$ となることが分かる．これらをベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に代入すると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって固有ベクトルは $\vec{v}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

$\lambda=2$ のとき, $\begin{pmatrix} 1-2 & 2 & -1 \\ 2 & 2-2 & 2 \\ -2 & 0 & 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{cases} -x+2y-z=0 \\ 2x+2z=0 \\ -2x-2z=0 \end{cases}$$

この式から $z=-x,\ y=0$ となることが分かる．よって固有ベクトルは $\vec{v}_2 = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ である．

$\lambda=3$ のとき, $\begin{pmatrix} 1-3 & 2 & -1 \\ 2 & 2-3 & 2 \\ -2 & 0 & 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{cases} -2x+2y-z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ -2x-3z=0 \end{cases}$$

この式から $z=-y,\ x=\dfrac{3}{2}y$ となることが分かる．それぞれ代入すると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}y \\ y \\ -y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}y\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

よって固有ベクトルは $\vec{v}_3 = c_3\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ である．

まとめると

$$\lambda_1=-2 \quad \text{のとき} \quad \vec{v}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 \quad \text{のとき} \quad \vec{v}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 \quad \text{のとき} \quad \vec{v}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$(c_1,\ c_2,\ c_3 \neq 0)$ である.

問題 004（バリエーション No.1）

行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\ (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ およびそれらに対する固有ベクトル $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3$ は,

$\lambda_1 = \boxed{\text{アイ}}$, $\vec{v}_1 = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{\text{ウ}} \\ \boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \boxed{\text{オカ}}$, $\vec{v}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\text{キク}} \\ \boxed{\text{ケ}} \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = \boxed{\text{コ}}$, $\vec{v}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\text{サ}} \\ \boxed{\text{シ}} \end{pmatrix}$

(ただし, $c_1,\ c_2,\ c_3$ は 0 でない任意の実数) である.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ として $|A - \lambda E| = 0$ とすると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} &= (1+\lambda)(2+\lambda)(-\lambda) - 1 + 2(2+\lambda) - (-\lambda) \\ &= -(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda) + 3\lambda + 3 \\ &= -(\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 3) = 0 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 3 &= \lambda^2(\lambda+3) - (\lambda+3) \\ &= (\lambda+3)(\lambda^2 - 1) \\ &= (\lambda+3)(\lambda+1)(\lambda-1) \end{aligned}$$

より, 固有値は $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1$ である.

$\lambda = -3$ のとき, $\begin{pmatrix} 0+3 & 1 & 0 \\ 2 & -1+3 & -1 \\ 1 & -1 & -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{cases} 3x+y=0 \\ 2x+2y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

この式から $y=-3x,\ z=-4x$ となることが分かる．よって固有ベクトルは $\vec{v}_1=c_1\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$ である．

$\lambda=-1$ のとき，$\begin{pmatrix}0+1 & 1 & 0\\ 2 & -1+1 & -1\\ 1 & -1 & -2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

この式から $y=-x,\ z=2x$ となることが分かる．よって固有ベクトルは $\vec{v}_2=c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ である．

$\lambda=1$ のとき，$\begin{pmatrix}0-1 & 1 & 0\\ 2 & -1-1 & -1\\ 1 & -1 & -2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & -1\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & -1\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ 2x-2y-z=0 \\ x-y-3z=0 \end{cases}$$

この式から $y=x,\ z=0$ となることが分かる．よって固有ベクトルは $\vec{v}_3=c_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ である．

まとめると

$$\lambda_1=-3 \ \text{ のとき } \ \vec{v}_1=c_1\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=-1 \ \text{ のとき } \ \vec{v}_2=c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3=1 \ \text{ のとき } \ \vec{v}_3=c_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$(c_1,\ c_2,\ c_3\neq 0)$ である．