［コース ID：46］　線形代数 III

46.10　対角化の計算

46.10.1　対角化の計算

問題 001（バリエーション No.2）

2 次形式 $5x^2 - 2xy + 5y^2$ の標準形を $ax'^2 + by'^2$ とすれば $(a > b)$

$$a = \boxed{\text{ア}}\ ,\ b = \boxed{\text{イ}}$$

である．

与えられた 2 次形式を対称行列 A を用いて表すと

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ である．固有値を求めるため, $|A - \lambda E| = 0$ を計算すると

$$|A - \lambda E| = (5 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 24 = (\lambda - 4)(\lambda - 6) = 0$$

よって $\lambda = 6,\ 4$ である．A を対角化する直交行列を T を

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となるようにとると $A = T \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} {}^tT$ であり

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tT \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} T = {}^t\left({}^tT \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} 5x^2 - 2xy + 5y^2 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} {}^tT \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= 6x'^2 + 4y'^2 \end{aligned}$$

よって $a = 6,\ b = 4$ である．

【答】　$\boldsymbol{a = 6,\ b = 4}$

問題 002（バリエーション No.1）

2 次形式 $-9x^2+8xy-9y^2$ の標準形を $ax'^2+by'^2$ とすれば $(a>b)$

$$a = \boxed{\text{アイ}}\ ,\ b = \boxed{\text{ウエオ}}$$

である.

与えられた 2 次形式を対称行列 A を用いて表すと

$$-9x^2+8xy-9y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 4 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より $A = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$ である. 固有値を求めるため, $|A-\lambda E|=0$ を計算すると

$$|A-\lambda E| = (-9-\lambda)^2 - 16 = \lambda^2+18\lambda+65 = (\lambda+5)(\lambda+13) = 0$$

よって $\lambda=-5,\ -13$ である. A を対角化する直交行列を T を

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -13 \end{pmatrix}$$

となるようにとり

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tT \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{aligned} -9x^2+8xy-9y^2 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -13 \end{pmatrix} {}^tT \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= -5x'^2 - 13y'^2 \end{aligned}$$

よって $a=-5,\ b=-13$ である.

【答】　$\boldsymbol{a=-5,\ b=-13}$

問題 003（バリエーション No.1）

行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ において, その固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2\ (\lambda_1 < \lambda_2)$ は

$$\lambda_1 = \boxed{\text{ア}},\ \lambda_2 = \boxed{\text{イ}}$$

であり, それぞれに対する固有ベクトル $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2$ は

$$\vec{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} \boxed{\text{ウ}} \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} \boxed{\text{エ}} \\ -3 \end{pmatrix}$$

(ただし, $c_1,\ c_2$ は 0 でない任意の実数) と表すことができる.

ここで, $P = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \boxed{\text{オ}} & 0 \\ 0 & \boxed{\text{カ}} \end{pmatrix}$$

であり, 一般に, 対角行列 $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ について, $X^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ が成り立つから

$$A^n = \begin{pmatrix} \boxed{\text{キク}}\,\lambda_1^n + \boxed{\text{ケ}}\,\lambda_2^n & \boxed{\text{コサ}}\,(\lambda_1^n - \lambda_2^n) \\ \boxed{\text{シ}}\,(\lambda_1^n - \lambda_2^n) & \boxed{\text{ス}}\,\lambda_1^n - \boxed{\text{セ}}\,\lambda_2^n \end{pmatrix}$$

であることが分かる.

A の固有値を求めるため $|A - \lambda E| = 0$ を計算すると

$$|A - \lambda E| = (5 - \lambda)(-2 - \lambda) + 12 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

より $\boldsymbol{\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2}$ である.

$\lambda = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から $y = -x$ であることが分かる. よって固有ベクトルは $\boldsymbol{\vec{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ である.

$\lambda = 2$ のとき

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から $y = -\dfrac{3}{4}x$ である. よって固有ベクトルは $\boldsymbol{\vec{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}}$ となる.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ とおくと, P は対角化行列なので

$$\boldsymbol{B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

が成り立つ．$B^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$ でありまた

$$B^n = \left(P^{-1}AP\right)^n = P^{-1}APP^{-1}APP^{-1}\cdots PP^{-1}AP = P^{-1}A^nP$$

となるので, $A^n = PB^nP^{-1}$ である．$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} A^n &= PB^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3\lambda_1^n & -4\lambda_1^n \\ \lambda_2^n & \lambda_2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3\lambda_1^n + 4\lambda_2^n & -4(\lambda_1^n - \lambda_2^n) \\ 3(\lambda_1^n - \lambda_2^n) & 4\lambda_1^n - 3\lambda_2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{A^n = \begin{pmatrix} -3\lambda_1^n + 4\lambda_2^n & -4(\lambda_1^n - \lambda_2^n) \\ 3(\lambda_1^n - \lambda_2^n) & 4\lambda_1^n - 3\lambda_2^n \end{pmatrix}}$$

である．

問題 004（バリエーション No.1）

行列 $A = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$ において, その固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2\ (\lambda_1 < \lambda_2)$ は

$$\lambda_1 = \boxed{\text{アイ}}\ ,\ \lambda_2 = \boxed{\text{ウエ}}$$

であり, それぞれに対する固有ベクトル $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2$ は

$$\vec{x}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\text{オ}} \end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = c_2\begin{pmatrix} 2 \\ \boxed{\text{カ}} \end{pmatrix}$$

(ただし, $c_1,\ c_2$ は 0 でない任意の実数) と表すことができる．
ここで, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{\text{オ}} & \boxed{\text{カ}} \end{pmatrix}$ とおくと,

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \boxed{\text{キク}} & 0 \\ 0 & \boxed{\text{ケコ}} \end{pmatrix}$$

であり, 一般に, 対角行列 $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ について, $X^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ が成り立つから

$$A^n = \begin{pmatrix} \boxed{\text{サ}}\ \lambda_1^n - \boxed{\text{シ}}\ \lambda_2^n & \boxed{\text{スセ}}\ (\lambda_1^n - \lambda_2^n) \\ \boxed{\text{ソタ}}\ (\lambda_1^n - \lambda_2^n) & \boxed{\text{チツ}}\ \lambda_1^n + \boxed{\text{テ}}\ \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

であることが分かる．

A の固有値を求めるため $|A - \lambda E| = 0$ を計算すると

$$|A - \lambda E| = (-6-\lambda)(3-\lambda) + 20 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0$$

より $\boldsymbol{\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1}$ である．

$\lambda = -2$ のとき

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から $y = 2x$ であることが分かる．よって固有ベクトルは $\boldsymbol{\vec{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$ である．

$\lambda = -1$ のとき

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から $y = \dfrac{5}{2}x$ である．よって固有ベクトルは $\boldsymbol{\vec{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}}$ となる．

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ とおくと，P は対角化行列なので

$$\boldsymbol{B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

が成り立つ．$B^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$ であり，$A^n = PB^nP^{-1}$ が成り立つ．

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} A^n &= PB^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5\lambda_1^n & -2\lambda_1^n \\ -2\lambda_2^n & \lambda_2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5\lambda_1^n - 4\lambda_2^n & -2(\lambda_1^n - \lambda_2^n) \\ 10(\lambda_1^n - \lambda_2^n) & -4\lambda_1^n + 5\lambda_2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{A^n = \begin{pmatrix} 5\lambda_1^n - 4\lambda_2^n & -2(\lambda_1^n - \lambda_2^n) \\ 10(\lambda_1^n - \lambda_2^n) & -4\lambda_1^n + 5\lambda_2^n \end{pmatrix}}$$

である．