［コース ID：46］　線形代数 III

46.9　対称行列の対角化

46.9.1　対称行列の対角化

問題 001（バリエーション No.1）

対称行列 $A = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ を, 直交行列を使って対角化してみよう.
A の固有値 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 < \lambda_2)$ を求めると,

$$\lambda_1 = \boxed{\text{アイウ}},\ \lambda_2 = \boxed{\text{エ}}$$

となる. 次に, これらの固有値に対する, 正規化された (大きさが 1 である) 固有ベクトル $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ を求めると, それぞれ

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}\begin{pmatrix} \boxed{\text{カ}} \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}\begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\text{クケ}} \end{pmatrix}$$

となる. ここで, 直交行列 T を

$$T = (\vec{e}_1\ \ \vec{e}_2)$$

とすれば,

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} \boxed{\text{コサシ}} & 0 \\ 0 & \boxed{\text{ス}} \end{pmatrix}$$

となり, 対角化することができる.

まず, A の固有値を求める. $|A - \lambda E| = 0$ とすると

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -8-\lambda & -6 \\ -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= -(8+\lambda)(1-\lambda) - 36 \\
&= \lambda^2 + 7\lambda - 44 \\
&= (\lambda + 11)(\lambda - 4) = 0
\end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{\lambda_1 = -11,\ \lambda_2 = 4}$ である.

$\lambda = -11$ のとき,

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると $x = 2y$ を得るので, 固有ベクトルは $\vec{v}_1 = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

$$\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

より正規化された固有ベクトルは

$$\boldsymbol{\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\lambda = 4$ のとき,

$$\begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると $y = -2x$ を得るので, 固有ベクトルは $\vec{v}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ である.

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

より正規化された固有ベクトルは

$$\boldsymbol{\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

ここで直交行列 T を

$$T = (\vec{e}_1 \;\; \vec{e}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\boldsymbol{{}^tTAT = \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

となる.

問題 002（バリエーション No.1）

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列を使って対角化してみよう.

A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\ (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ を求めると,

$$\lambda_1 = \boxed{\text{アイ}},\ \lambda_2 = \boxed{\text{ウ}},\ \lambda_3 = \boxed{\text{エ}}$$

となる. 次に, これらの固有値に対する, 正規化された (大きさが 1 である) 固有ベクトル $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ を求めると, それぞれ

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}} \begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{\text{カ}} \\ \boxed{\text{キ}} \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\text{ケ}} \\ \boxed{\text{コ}} \end{pmatrix} \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\text{シス}} \\ \boxed{\text{セ}} \end{pmatrix}$$

となる. ここで, 直交行列 T を

$$T = (\vec{e}_1 \;\; \vec{e}_2 \;\; \vec{e}_3)$$

とすれば,

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ソタ}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{チ}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{ツ}} \end{pmatrix}$$

となり, 対角化することができる.

まず, A の固有値を求める. $|A-\lambda E|=0$ とすると

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 2\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 2 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix} &= (1-\lambda)^2(2-\lambda)+2+2-4(2-\lambda)-(1-\lambda)-(1-\lambda)\\ &= (1-\lambda)^2(2-\lambda)-6(1-\lambda)\\ &= (1-\lambda)\left((1-\lambda)(2-\lambda)-6\right)\\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4)\\ &= -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-4)=0\end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4}$ である.

$\lambda=-1$ のとき,

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{cases}2x-y+2z=0\\ -x+3y-z=0\\ 2x-y+2z=0\end{cases}$$

を得る. これらの式から $y=0,\ x=-z$ を得る. 固有ベクトルは $\vec{v}_1=c_1\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ であり,

$$\left|\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$$

より正規化された固有ベクトルは

$$\boldsymbol{\vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}$$

$\lambda=1$ のとき,

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{cases}-y+2z=0\\ -x+y-z=0\\ 2x-y=0\end{cases}$$

を得る. これらの式から $y=2x,\ z=x$ を得る. 固有ベクトルは $\vec{v}_2=c_2\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ であり,

$$\left|\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$$

より正規化された固有ベクトルは

$$\boldsymbol{\vec{e}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}}$$

$\lambda = 4$ のとき,

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{cases} -3x - y + 2z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

を得る. これらの式から $z = x,\ y = -x$ を得る. 固有ベクトルは $\vec{v}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり,

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

より正規化された固有ベクトルは

$$\boldsymbol{\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

ここで直交行列 T を

$$T = (\vec{e}_1 \ \ \vec{e}_2 \ \ \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \dfrac{2}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

とすると

$$\boldsymbol{{}^tTAT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

となる.

問題 003（バリエーション No.1）

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ を直交行列を使って対角化してみよう.

A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ を求めると,

$$\lambda_1 = \boxed{\text{アイ}},\ \lambda_2 = \boxed{\text{ウ}},\ \lambda_3 = \boxed{\text{エ}}$$

となる. 次に, これらの固有値に対する, 正規化された (大きさが 1 である) 固有ベクトル $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ を求めると, それぞれ

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}\begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\text{キ}} \\ \boxed{\text{ク}} \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}\begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{\text{コ}} \\ \boxed{\text{サ}} \end{pmatrix} \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}\begin{pmatrix} 3 \\ \boxed{\text{セ}} \\ \boxed{\text{ソタ}} \end{pmatrix}$$

となる. ここで, 直交行列 T を

$$T = (\vec{e}_1 \ \ \vec{e}_2 \ \ \vec{e}_3)$$

とすれば,

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} \boxed{\text{チツ}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{テ}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{ト}} \end{pmatrix}$$

となり, 対角化することができる.

まず, A の固有値を求める. $|A - \lambda E| = 0$ とすると

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 3-\lambda & -3 \\ -3 & -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} &= -(3-\lambda)^2(2+\lambda) + 18 + 18 - 9(3-\lambda) - 9(3-\lambda) + 4(2+\lambda) \\
&= -(\lambda-3)^2(\lambda+2) + 22\lambda - 10 \\
&= -(\lambda^2 - 6\lambda + 9)(\lambda+2) + 22\lambda - 10 \\
&= -(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 18) + 22\lambda - 10 \\
&= -(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 25\lambda + 28) = 0
\end{aligned}$$

ここで $f(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 25\lambda + 28$ とおくと

$$f(1) = 1 - 4 - 25 + 28 = 0$$

因数定理から $f(\lambda)$ は $(\lambda - 1)$ を因数に持つことが分かる. 因数分解すると

$$f(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2 - 3\lambda - 28) = (\lambda-1)(\lambda+4)(\lambda-7)$$

よって $\boldsymbol{\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 7}$ である.

$\lambda = -4$ のとき,

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{cases} 7x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 7y - 3z = 0 \\ -3x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

を得る．これらの式から $y=x,\ z=3x$ を得る．固有ベクトルは $\vec{v}_1=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ であり，

$$\left|\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$$

より正規化された固有ベクトルは

$$\boldsymbol{\vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}}$$

$\lambda=1$ のとき，

$$\begin{pmatrix}2&2&-3\\2&2&-3\\-3&-3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{cases}2x+2y-3z=0\\2x+2y-3z=0\\-3x-3y-3z=0\end{cases}$$

を得る．これらの式から $x=-y,\ z=0$ を得る．固有ベクトルは $\vec{v}_2=c_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ であり，

$$\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$$

より正規化された固有ベクトルは

$$\boldsymbol{\vec{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}$$

$\lambda=7$ のとき，

$$\begin{pmatrix}-4&2&-3\\2&-4&-3\\-3&-3&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{cases}-4x+2y-3z=0\\2x-4y-3z=0\\-3x-3y-9z=0\end{cases}$$

を得る．これらの式から $y=x,\ z=-\dfrac{2}{3}x$ を得る．固有ベクトルは $\vec{v}_3=c_3\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}$ であり，

$$\left|\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{9+9+4}=\sqrt{22}$$

より正規化された固有ベクトルは

$$\boldsymbol{\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

ここで直交行列 T を

$$T = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3)$$

とすると

$$\boldsymbol{{}^tTAT = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}}$$

となる.

問題 004（バリエーション No.2）

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 5 & 1 & 5 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列を使って対角化してみよう.

まず, A の固有値を求めると,

$$\lambda_1 = \boxed{\text{アイ}}\ ,\ \lambda_2 = \boxed{\text{ウ}}$$

(ただし, λ_2 は重解) となる. これらに対する固有ベクトル $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ は, 0 でない実数 c_1, c_2, c_3 を用いて

$$\vec{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} \boxed{\text{エ}} \\ -1 \\ \boxed{\text{オ}} \end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} \boxed{\text{カ}} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{\text{キ}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表すことができる.
次に, ここに現れた 3 つのベクトル

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} \boxed{\text{エ}} \\ -1 \\ \boxed{\text{オ}} \end{pmatrix},\ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} \boxed{\text{カ}} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{\text{キ}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

を,「グラムシュミットの直交化法」を用いて直交化すると, それぞれ

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}} \begin{pmatrix} \boxed{\text{エ}} \\ -1 \\ \boxed{\text{オ}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{a}_2 - (\vec{a}_2 \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\text{コ}} \\ \boxed{\text{サシ}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = \vec{a}_3 - (\vec{a}_3 \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 - (\vec{a}_3 \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{v}_3}{|\vec{v}_3|} = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}} \begin{pmatrix} \boxed{\text{セ}} \\ \boxed{\text{ソ}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる. これらを用いて, 直交行列 T を

$$T = (\vec{e}_1 \ \ \vec{e}_2 \ \ \vec{e}_3)$$

とおけば,

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} \boxed{\text{タチ}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{ツ}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{テ}} \end{pmatrix}$$

となり, 対角化することができる.

まず, A の固有値を求める. $|A - \lambda E| = 0$ とすると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 & -5 \\ 5 & 1-\lambda & 5 \\ -5 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)^3 - 125 - 125 - 25(1-\lambda) - 25(1-\lambda) - 25(1-\lambda) \\ &= -(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) - 250 + 75\lambda - 75 \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 72\lambda - 324 = 0 \end{aligned}$$

ここで $f(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2-72\lambda+324$ とおくと

$$f(6)=216-108-432+324=0$$

因数定理から $f(\lambda)$ は $(\lambda-6)$ を因数に持つことが分かる．因数分解すると

$$f(\lambda)=(\lambda-6)(\lambda^2-3\lambda+54)=(\lambda-6)(\lambda+9)(\lambda-6)$$

よって固有値は $\boldsymbol{\lambda_1=-9,\ \lambda_2=6}$ である．

$\lambda=-9$ のとき

$$\begin{pmatrix}10&5&-5\\5&10&5\\-5&5&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases}10x+5y-5z=0\\5x+10y+5z=0\\-5x+5y+10z=0\end{cases}$$

これらの式より $y=-x,\ z=x$ を得る．よって固有ベクトルは $\vec{x}_1=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ となる．

$\lambda=6$ のとき

$$\begin{pmatrix}-5&5&-5\\5&-5&5\\-5&5&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

より

$$5x-5y+5z=0$$

この式より $z=-x+y$ を得る．よって固有ベクトルは $\vec{x}_2=c_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ となる．

ここから

$$\boldsymbol{\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}$$

としてグラムシュミットの直交化法を行う．

$$|\vec{a}_1|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

より

$$\boldsymbol{\vec{e}_1=\frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}$$

また $\vec{a}_2\cdot\vec{e}_1=0$ より $\vec{v}_2=\vec{a}_2-(\vec{a}_2\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1=\vec{a}_2$ であるから

$$\boldsymbol{\vec{e}_2=\frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}$$

最後に $\vec{a}_3\cdot\vec{e}_1=0,\ \vec{a}_3\cdot\vec{e}_2=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より

$$\vec{v}_3=\vec{a}_3-(\vec{a}_3\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1-(\vec{a}_3\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$|\vec{v}_3| = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ であるから

$$\boldsymbol{\vec{e}_3 = \frac{\vec{v}_3}{|\vec{v}_3|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}$$

となる.

$$T = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3)$$

とおけば, T は直交行列であり,

$$\boldsymbol{{}^tTAT = \begin{pmatrix}-9 & 0 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}}$$

となる.