［コース ID：46］　線形代数 III

46.2　線形変換の性質

46.2.1　線形変換の性質

問題 001（バリエーション No.1）

ある線形変換 f による, 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の像が, それぞれ

$$f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ f(\vec{b}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

であるとき, $f(5\vec{a}+2\vec{b}) = \begin{pmatrix} \boxed{\text{アイウ}} \\ \boxed{\text{エオ}} \end{pmatrix}$ である.

f の線形性から

$$f(5\vec{a}+2\vec{b}) = 5f(\vec{a}) + 2f(\vec{b}) = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

となる.

【答】 $\begin{pmatrix} \mathbf{-14} \\ \mathbf{16} \end{pmatrix}$

問題 002（バリエーション No.1）

行列 $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ で表される線形変換による, 直線 $y = -3x - 4$ の像の方程式は

$$13x + \boxed{\text{アイ}}\, y + \boxed{\text{ウエ}} = 0$$

である.

直線 $y = -3x - 4$ 上の点は $\begin{pmatrix} t \\ -3t-4 \end{pmatrix}$ と表せるので, この点の像は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -3t-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10t+12 \\ -13t-20 \end{pmatrix}$$

と表せる.

$$\begin{cases} x' = 10t + 12 \\ y' = -13t - 20 \end{cases}$$

から t を消去すると

$$13x' + 10y' = 13 \cdot 12 - 10 \cdot 20 = -44$$

となるので, 像の方程式は $13x + 10y + 44 = 0$ である.

【答】　$\boldsymbol{13x + 10y + 44 = 0}$

問題 003（バリエーション No.1）

媒介変数 t によって表される以下の図形

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$$

の, 行列 $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ で表される線形変換による像の方程式は

$$6x - \boxed{\text{アイ}}\, y + \boxed{\text{ウエオ}} = 0$$

である.

点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4t \\ 4-2t \end{pmatrix}$ の線形変換による像は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3+4t \\ 4-2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26t+8 \\ -12t+13 \end{pmatrix}$$

となるので

$$\begin{cases} x' = -26t + 8 \\ y' = -12t + 13 \end{cases}$$

から t を消去すると

$$6x' - 13y' = 6 \cdot 8 - 13 \cdot 13 = -121$$

よって像の方程式は $6x - 13y + 121 = 0$ である.

【答】 $\boldsymbol{6x - 13y + 121 = 0}$

問題 004（バリエーション No.1）

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ で表される線形変換により, 直線 $y = 2x + 4$ がそれ自身に移されるとき,

$a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である.

直線 $y = 2x + 4$ 上の点 $\begin{pmatrix} t \\ 2t+4 \end{pmatrix}$ の線形変換による像は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 2t+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+4 \\ (a+2b)t+4b \end{pmatrix}$$

これが再び直線 $y = 2x + 4$ 上にあるので

$$(a+2b)t + 4b = 2(3t+4) + 4$$

が成り立つ. この式を整理すると

$$(a+2b-6)t + (4b-12) = 0$$

であり, これが任意の t に対して成り立つので,

$$\begin{cases} a + 2b - 6 = 0 \\ 4b - 12 = 0 \end{cases}$$

これを解くと $b=3,\ a=6-6=0$ を得る.

【答】　$\boldsymbol{a=0,\ b=3}$