［コース ID：46］　線形代数 III

46.5　直交行列

46.5.1　直交行列

問題 001（バリエーション No.1）

行列 $A = \dfrac{1}{\sqrt{41}}\begin{pmatrix} 5 & a \\ -4 & b \end{pmatrix}$ が直交行列であるならば,

$a = \pm$ $\boxed{\text{ア}}$, $b = \pm$ $\boxed{\text{イ}}$ (複号同順) である.

$\vec{a}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{41}}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{41}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とすると, A が直交行列のとき

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0 \ \text{ かつ } \ |\vec{a}_2| = 1$$

が成り立つ．この二つの条件から

$$5a - 4b = 0 \ \text{ かつ } \ a^2 + b^2 = 41$$

を得る．$b = \dfrac{5}{4}a$ より

$$a^2 + \left(\frac{5}{4}a\right)^2 = \frac{41}{16}a^2 = 41$$

となるのでここから $a = \pm 4,\ b = \pm 5$ であることが分かる.

【答】 $\boldsymbol{a = \pm 4,\ b = \pm 5}$

問題 002（バリエーション No.1）

行列 $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & a & 4 \\ -2 & 4 & b \end{pmatrix}$ が直交行列であるならば,

$a =$ $\boxed{\text{ア}}$, $b =$ $\boxed{\text{イウ}}$ である.

$\vec{a}_1 = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}$,$\vec{a}_3 = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ b \end{pmatrix}$ とすると, A が直交行列であることから

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0 \ \text{ かつ } \ \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 = 0$$

が成り立つ．よって

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{1}{36}(16 - 4a - 8) = \frac{1}{36}(8 - 4a) = 0$$

より $a = 2$ であり, また

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 = \frac{1}{36}(8 - 16 - 2b) = \frac{1}{36}(-8 - 2b) = 0$$

より $b = -4$ である.

【答】 $\boldsymbol{a=2,\ b=-4}$

問題 003（バリエーション No.1）

行列 $A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ a & -2 & 1\\ -1 & b & 2\end{pmatrix}$ が直交行列であるならば,

$a=$ $\boxed{\text{アイ}}$, $b=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である.

$\vec{a}_1=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\ a\\ -1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ b\end{pmatrix}$, $\vec{a}_3=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ とすると, A が直交行列であることから

$$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_3=0\ \text{ かつ }\ \vec{a}_2\cdot\vec{a}_3=0$$

が成り立つ. よって

$$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_3=\frac{1}{9}(4+a-2)=\frac{1}{9}(2+a)=0$$

より $a=-2$ であり, また

$$\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3=\frac{1}{9}(-2-2+2b)=\frac{1}{9}(-4+2b)=0$$

より $b=2$ である.

【答】 $\boldsymbol{a=-2,\ b=2}$

問題 004（バリエーション No.1）

行列 $A=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}4 & -2 & -4\\ -2 & 4 & a\\ b & 4 & 2\end{pmatrix}$ が直交行列であるならば,

$a=$ $\boxed{\text{アイ}}$, $b=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である.

$\vec{a}_1=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\ -2\\ b\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 4\end{pmatrix}$, $\vec{a}_3=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-4\\ a\\ 2\end{pmatrix}$ とすると, A が直交行列であることから

$$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=0\ \text{ かつ }\ \vec{a}_2\cdot\vec{a}_3=0$$

が成り立つ. よって

$$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=\frac{1}{36}(-8-8+4b)=\frac{1}{36}(-16+4b)=0$$

より $b=4$ であり, また

$$\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3=\frac{1}{36}(8+4a+8)=\frac{1}{36}(16+4a)=0$$

より $a=-4$ である.

【答】 $\boldsymbol{a=-4,\ b=4}$