[コース ID：46]　線形代数 III

46.8　固有値が重解の場合の対角化

46.8.1　固有値が重解の場合の対角化

問題 001（バリエーション No.1）

行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ およびそれらに対する固有ベクトル $\vec{v_1},\ \vec{v_2}$ は,

$\lambda_1 = \boxed{\text{アイ}}$, $\vec{v_1} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\text{ウ}} \\ \boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \boxed{\text{オ}}$, $\vec{v_2} = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{\text{カ}} \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\text{キク}} \\ 0 \end{pmatrix}$

(ただし, $c_1,\ c_2,\ c_3$ は 0 でない任意の実数) である.

従って, 行列 A は対角化可能で, 対角化行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{カ}} & \boxed{\text{キク}} \\ \boxed{\text{エ}} & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を用いると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ケコ}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{サ}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{シ}} \end{pmatrix}$$

となる.

$|A - \lambda E| = 0$ とすると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1+\lambda)^2(1-\lambda) - 4(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)\left((1+\lambda)^2 - 4\right) \\ &= (1-\lambda)\left((1+\lambda)+2\right)\left((1+\lambda)-2\right) \\ &= (1-\lambda)(\lambda+3)(\lambda-1) \\ &= -(\lambda+3)(\lambda-1)^2 = 0 \end{aligned}$$

よって $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 1$ である.

$\lambda = -3$ のとき $\begin{pmatrix} -1+3 & -2 & 0 \\ -2 & -1+3 & 0 \\ -2 & -2 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{cases} 2x-2y=0 \\ -2x+2y=0 \\ -2x-2y+4z=0 \end{cases}$$

これらから $y=x,\ z=x$ であることが分かる．よって固有ベクトルは $\vec{v}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

$\lambda = 1$ のとき $\begin{pmatrix} -1-1 & -2 & 0 \\ -2 & -1-1 & 0 \\ -2 & -2 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$-2x-2y=0$$

より $y=-x$ であることが分かる, よって固有ベクトルは

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．以上をまとめると

$$\lambda_1 = -3 \quad のとき \quad \vec{v}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \lambda_2 = 1 \quad のとき \quad \vec{v}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ここで, $c_1,\ c_2,\ c_3$ は $c_1 \neq 0$ であり, $c_2 = c_3 = 0$ でない) である．
対角化行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．

(注意)
対角化した際, 対角成分には固有ベクトルに対応する固有値が並ぶことは分かっているので $P^{-1}AP$ を実際に計算する必要は無い．実際, 3×3 の行列でさえ $P^{-1}AP$ を計算するのは面倒である．
ただし, 具体的に計算してみて対角行列にならなかったら, どこか計算が間違っているということなので, 時間と労力に余裕がある人は検算として計算してみるとよい．(ここでは省略する)

問題 002（バリエーション No.2）

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ およびそれらに対する固有ベクトル $\vec{v_1},\ \vec{v_2}$ は,

$$\lambda_1 = \boxed{\text{アイ}},\ \vec{v_1} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\text{ウ}} \\ \boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \boxed{\text{オ}},\ \vec{v_2} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\text{カ}} \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \boxed{\text{キク}} \end{pmatrix}$$

(ただし, $c_1,\ c_2,\ c_3$ は 0 でない任意の実数) である.

従って, 行列 A は対角化可能で, 対角化行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{カ}} & 1 \\ \boxed{\text{エ}} & 0 & \boxed{\text{キク}} \end{pmatrix}$ を用いると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ケコ}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{サ}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{シ}} \end{pmatrix}$$

となる.

$|A - \lambda E| = 0$ とすると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= -(2-\lambda)(2+\lambda)(1-\lambda) - 4(2-\lambda) \\ &= -(2-\lambda)\left((2+\lambda)(1-\lambda)+4\right) \\ &= -(\lambda-2)\left(\lambda^2+\lambda-6\right) \\ &= -(\lambda-2)(\lambda+3)(\lambda-2) \\ &= -(\lambda+3)(\lambda-2)^2 = 0 \end{aligned}$$

よって $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 2$ である.

$\lambda = -3$ のとき $\begin{pmatrix} 2+3 & -2 & -1 \\ 0 & -2+3 & -2 \\ 0 & -2 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{cases} 5x - 2y - z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ -2y + 4z = 0 \end{cases}$$

これらから $y = 2z,\ x = z$ であることが分かる. よって固有ベクトルは $\vec{v_1} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

$\lambda = 2$ のとき $\begin{pmatrix} 2-2 & -2 & -1 \\ 0 & -2-2 & -2 \\ 0 & -2 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$-2y - z = 0$$

よって $z = -2y$ より, 固有ベクトルは

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

である. 以上をまとめると

$$\lambda_1 = -3 \ \text{ のとき } \ \vec{v_1} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 2 \ \text{ のとき } \ \vec{v_2} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(ここで, $c_1,\ c_2,\ c_3$ は $c_1 \neq 0$ であり, $c_2 = c_3 = 0$ でない) である.
対角化行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

とすると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる.

問題 003（バリエーション No.1）

行列 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -1 & 0 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ およびそれらに対する固有ベクトル $\vec{v_1},\ \vec{v_2}$ は,

$\lambda_1=\boxed{\text{ア}}$, $\vec{v_1}=c_1\begin{pmatrix}\boxed{\text{イウ}}\\ 1\\ \boxed{\text{エ}}\end{pmatrix}$

$\lambda_2=\boxed{\text{オカ}}$, $\vec{v_2}=c_2\begin{pmatrix}\boxed{\text{キ}}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}\boxed{\text{ク}}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

(ただし, $c_1,\ c_2,\ c_3$ は 0 でない任意の実数) である.

従って, 行列 A は対角化可能で, 対角化行列 $P=\begin{pmatrix}\boxed{\text{イウ}} & \boxed{\text{キ}} & \boxed{\text{ク}}\\ 1 & 1 & 0\\ \boxed{\text{エ}} & 0 & 1\end{pmatrix}$ を用いると

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\boxed{\text{ケ}} & 0 & 0\\ 0 & \boxed{\text{コサ}} & 0\\ 0 & 0 & \boxed{\text{シス}}\end{pmatrix}$$

となる.

$|A-\lambda E|=0$ とすると

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & -2\\ -1 & -\lambda & 1\\ -2 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(-\lambda)+4+4-(-4\lambda)-2(1-\lambda)-2(1-\lambda)$$

$$=-(\lambda^3-2\lambda^2+\lambda)+8\lambda+4$$

$$=-(\lambda^3-2\lambda^2-7\lambda-4)=0$$

ここで $f(\lambda)=\lambda^3-2\lambda^2-7\lambda-4$ とおくと

$$f(-1)=-1-2+7-4=0$$

因数定理から $f(\lambda)$ は $(\lambda+1)$ を因数に持つ. 因数分解すると

$$\lambda^3-2\lambda^2-7\lambda-4=(\lambda+1)(\lambda^2-3\lambda-4)=(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-4)$$

よって $\lambda_1=4,\ \lambda_2=-1$ である.

$\lambda=4$ のとき $\begin{pmatrix}1-4 & -2 & -2\\ -1 & -4 & 1\\ -2 & 2 & 1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & -2\\ -1 & -4 & 1\\ -2 & 2 & -3\end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix}-3 & -2 & -2\\ -1 & -4 & 1\\ -2 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{cases}-3x-2y-2z=0\\ -x-4y+z=0\\ -2x+2y-3z=0\end{cases}$$

これを解くと $x=-2y,\ z=2y$ となる．よって固有ベクトルは $\vec{v}_1=c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ である．

$\lambda=-1$ のとき $\begin{pmatrix}1+1&-2&-2\\-1&1&1\\-2&2&1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-1&1&1\\-2&2&2\end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-1&1&1\\-2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

とすると

$$-x+y+z=0$$

である．$x=y+z$ より固有ベクトルは

$$\vec{v}_2=\begin{pmatrix}y+z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

である．まとめると

$$\lambda_1=4\ \text{ のとき }\ \vec{v}_1=c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix},\quad \lambda_2=-1\ \text{ のとき }\ \vec{v}_2=c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

(ここで, $c_1,\ c_2,\ c_3$ は $c_1\neq 0$ であり, $c_2=c_3=0$ でない) である．
対角化行列 P を

$$P=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$$

とすると

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

となる．

問題 004（バリエーション No.1）

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ およびそれらに対する固有ベクトル $\vec{v_1},\ \vec{v_2}$ は,

$\lambda_1 = \boxed{\text{アイ}}$, $\vec{v_1} = c_1 \begin{pmatrix} \boxed{\text{ウ}} \\ \boxed{\text{エ}} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \boxed{\text{オ}}$, $\vec{v_2} = c_2 \begin{pmatrix} \boxed{\text{カキ}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \boxed{\text{クケ}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ただし, $c_1,\ c_2,\ c_3$ は 0 でない任意の実数) である.

従って, 行列 A は対角化可能で, 対角化行列 $P = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{カキ}} & \boxed{\text{クケ}} \\ \boxed{\text{エ}} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を用いると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \boxed{\text{コサ}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{シ}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{ス}} \end{pmatrix}$$

となる.

$|A - \lambda E| = 0$ とすると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= (1+\lambda)^2(1-\lambda) - 4(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)\left((1+\lambda)^2 - 4\right) \\ &= (1-\lambda)\left((1+\lambda)+2\right)\left((1+\lambda)-2\right) \\ &= (1-\lambda)(\lambda+3)(\lambda-1) \\ &= -(\lambda+3)(\lambda-1)^2 = 0 \end{aligned}$$

よって $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 1$ である.

$\lambda = -3$ のとき $\begin{pmatrix} 1+3 & 0 & 0 \\ -2 & -1+3 & -2 \\ -2 & -2 & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{cases} 4x = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \\ -2y - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

これらから $x = 0,\ y = z$ であることが分かる. よって固有ベクトルは $\vec{v_1} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

$\lambda = 1$ のとき $\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ -2 & -1-1 & -2 \\ -2 & -2 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$-2x - 2y - 2z = 0$$

である. $x = -y - z$ より固有ベクトルは

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

以上をまとめると

$$\lambda_1 = -3 \ \text{のとき}\ \vec{v_1} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 1 \ \text{のとき}\ \vec{v_2} = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ここで, $c_1,\ c_2,\ c_3$ は $c_1 \neq 0$ であり, $c_2 = c_3 = 0$ でない) である.
対角化行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる.