［コース ID：47］　基礎数学 BII

47.6　数列, 等差数列

47.6.1　数列

問題 001（バリエーション No.1）

次の数列を完成させよ．1，7，13，19，25，$\boxed{\text{アイ}}$

直前の項に 6 を加えた数が次の項になっている．よって $25 + 6 = 31$.

【答】　31

問題 002（バリエーション No.100）

次の数列を完成させよ．1701，567，189，63，21，$\boxed{\text{ア}}$

前の項を $\dfrac{1}{3}$ 倍した数が次の項になっている．よって $21 \times \dfrac{1}{3} = 7$.

【答】　7

問題 003（バリエーション No.68）

次の数列を完成させよ．-6，2，12，24，38，$\boxed{\text{アイ}}$

前の項との差を考えると

$$2 - (-6) = 8,\quad 12 - 2 = 10,\quad 24 - 12 = 12,\quad 38 - 24 = 14$$

のようにそれぞれ前の項に 8，10，12，14 を加えた数になっている．よって次は前の項に 16 を加えればよく $38 + 16 = 54$.

【答】　54

47.6.2　等差数列

問題 001（バリエーション No.100）

初項 48, 公差 -6 の等差数列 $\{a_n\}$ について,
第 10 項は $\boxed{\text{アイ}}$,
-36 は第 $\boxed{\text{ウエ}}$ 項,
$a_n < 0$ となる最小の n は $\boxed{\text{オカ}}$ である.
また, 初項から第 n 項までの和を S_n とすると, $S_n < 0$ となる最小の n は $\boxed{\text{キク}}$ であり, そのときの S_n の値は $\boxed{\text{ケコサ}}$ である.

$\{a_n\}$ は初項 48, 公差 -6 の等差数列であることから

$$a_1 = 48,\quad a_n - a_{n-1} = -6 \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

が成り立つ．このとき, $n > 1$ である n に対して,

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} - 6 \\
&= (a_{n-2} - 6) - 6 = a_{n-2} + 2 \cdot (-6) \\
&= (a_{n-3} - 6) + 2 \cdot (-6) = a_{n-3} + 3 \cdot (-6) \\
&= \cdots \\
&= a_2 + (n-2) \cdot (-6) \\
&= a_1 + (n-1) \cdot (-6) = 48 - 6(n-1)
\end{aligned}
$$

よって $a_n = -6n + 54$ と表せる.

$n = 10$ とすると $a_{10} = -6 \cdot 10 + 54 = \mathbf{-6}$ である.
-36 が第何項か調べるために

$$-6n + 54 = -36$$

とおくと $6n = 90$ より $n = 15$, すなわち -36 は**第 15 項**である.
また, $-6n + 54 < 0$ とおくと $n > 9$ となるので, $a_n < 0$ となる最小の n は **10** である.
初項から第 n 項までの和 S_n を考える.

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

であるが, 逆に数えると

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{n-(k-1)} + \cdots + a_2 + a_1$$

2 式を足すと

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + \left(a_k + a_{n-(k-1)}\right) + \cdots + (a_n + a_1)$$

となる．ここで,

$$
\begin{aligned}
a_k + a_{n-(k-1)} &= (-6k + 54) + (-6\,(n - (k-1)) + 54) \\
&= -6(n+1) + 108
\end{aligned}
$$

これは k に寄らないので

$$2S_n = n \times \{-6(n+1) + 108\}$$

$$S_n = -3n(n+1) + 54n = -3n^2 + 51n$$

が成り立つ．$S_n < 0$ とすると $n > 0$ より

$$-3n + 51 < 0$$

これを解くと $n > 17$ となるので, $S_n < 0$ となる最小の n は **18** であり, そのとき

$$
\begin{aligned}
S_{18} &= -3 \cdot 18^2 + 51 \cdot 18 \\
&= -3 \cdot 18 \cdot 18 + 3 \cdot 17 \cdot 18 \\
&= -3 \cdot 18 = -54
\end{aligned}
$$

よって $S_{18} = \mathbf{-54}$ である.
(注意)
上で行った等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n の計算方法は一般化できる.
すなわち, 初項 a_1, 公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ は

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

という形で表せるので, このとき

$$a_k + a_{n-(k-1)} = 2a_1 + (n-1)d$$

これは k に寄らないので

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + \left(a_k + a_{n-(k-1)}\right) + \cdots + (a_n + a_1) \\ &= n\left(2a_1 + (n-1)d\right) \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{1}{2}n(2a_1 + (n-1)d)$$

また, k に寄らないので特に $(a_1 + a_n)$ を採用すれば

$$S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$$

が成り立つ.

問題 002（バリエーション No.50）

200 以上 400 以下の範囲にあるすべての 13 の倍数の和は $\boxed{\text{アイウエ}}$ である.

まず

$$200 \leqq 13n \leqq 400$$

とおくと $15 < \dfrac{200}{13} < 16$ かつ $30 < \dfrac{400}{13} < 31$ であるから $16 \leqq n \leqq 30$ である. 実際, $13 \times 16 = 208$, $13 \times 30 = 390$ より 208 は 200 以上の 13 の倍数で最小, 390 は 400 以下の 13 の倍数で最大の数であることが分かる.

よって数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = 13(n+15) = 13n + 195$$

と定めると, $\{a_n\}$ は等差数列であり, 求める和は

$$S_{15} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{15}$$

と表せる. 等差数列 $\{a_n\}$ において, 初項 a_1, 末項 a_n のとき, 初項から末項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$$

と表せるので $n = 15,\ a_1 = 13 \times 16 = 208,\ a_{15} = 13 \times 30 = 390$ とすると

$$S_{15} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (208 + 390) = 4485$$

よって 200 以上 400 以下の範囲になる 13 の倍数の和は 4485 である.

【答】　4485

問題 003（バリエーション No.1）

初項 22, 公差 2 の等差数列について, 初項から第 $\boxed{\text{アイ}}$ 項までの和は 490 である.

初項 a_1, 公差 d の等差数列の第 n 項は

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

と表せる．このとき, 初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}n\left(2a_1 + (n-1)d\right)$$

と表せるので, 初項 22, 公差 2 の等差数列の初項から第 n 項までの和は

$$\frac{1}{2}n(2 \times 22 + (n-1) \times 2) = \frac{1}{2}n(2n+42) = n(n+21)$$

$n(n+21) = 490$ とおくと,

$$n^2 + 21n - 490 = (n+35)(n-14) = 0$$

$n > 0$ より, $n = 14$ である．

【答】　第 14 項

問題 004（バリエーション No.50）

> 第 13 項が -26 で, 第 16 項が -38 である等差数列について,
> 第 **アイ** 項は -114 であり,
> はじめて -500 以下となるのは第 **ウエオ** 項である．

初項 a_1, 公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

と表せる．仮定から $a_{13} = -26$, $a_{16} = -38$ であるから

$$a_{16} - a_{13} = (a_1 + 15d) - (a_1 + 12d) = 3d$$

また, $-38 - (-26) = -12$ より $3d = -12$, $d = -4$ であることが分かる．初項を求めると,

$$a_{13} = a_1 - 4 \cdot 12 = -26$$

より $a_1 = 48 - 26 = 22$ である．よって $\{a_n\}$ は初項 22, 公差 -4 の等差数列である．

$$22 - 4(n-1) = -114$$

とおくと $4n = 114 + 26 = 140$ より $n = 35$. **第 35 項**の値が -114 になる．次に

$$22 - 4(n-1) \leqq -500$$

とおくと $4n \geqq 526$ より $n \geqq \dfrac{526}{4} = 131.5$.
n は整数であるから, はじめて -500 以下となるのは**第 132 項**である．

問題 005（バリエーション No.50）

> 等差数列をなす 3 つの数の和が -15 で, 積が -80 であるとき, この 3 つの数を大きい順に並べると
>
> **アイ** , **ウエ** , **オカ**
>
> である．

等差数列をなす 3 数を $x,\ y,\ z$ とおく．$x < y < z$ とすると, 仮定から

$$y = x + d$$
$$z = y + d = x + 2d$$

を満たすような $d > 0$ が存在する．このとき

$$x + y + z = x + (x + d) + (x + 2d) = 3x + 3d = -15$$

より $x = -d - 5$ である．また

$$xyz = x(x + d)(x + 2d) = (-d - 5) \cdot (-5) \cdot (d - 5) = -80$$

より, $5(dr - 25) = -80$, 整理すると $d^2 = 9$ より $d = 3$ となる．$x = -d - 5 = -8$ より

$$y = -8 + 3 = -5$$
$$z = -5 + 3 = -2$$

大きい順に並べると $-2,\ -5,\ -8$ となる.

【答】　$-2,\ -5,\ -8$

問題 006（バリエーション No.50）

50 から 100 までの整数の中で, 6 で割り切れない数の和は $\boxed{\text{アイウエ}}$ である.

求める和を S とし,

$$S_1 = 50 \text{ から } 100 \text{ までの整数の和}$$

$$S_2 = 50 \text{ から } 100 \text{ までの整数で } 6 \text{ の倍数の和}$$

とすると $S = S_1 - S_2$ である.
等差数列 $\{a_n\}$ を $a_n = n + 49$ と定めると

$$S_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{51}$$

よって

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 51 \cdot (50 + 100) = 3825$$

また, 等差数列 $\{b_n\}$ を $b_n = 6(n + 8) = 6n + 48$ と定めると $6 \times 16 < 100 < 6 \times 17$ より

$$S_2 = b_1 + b_2 + \cdots + b_8$$

であるので

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (54 + 96) = 600$$

となる．よって

$$S = S_1 - S_2 = 3825 - 600 = 3225$$

【答】　3225

問題 006（バリエーション No.60）

1 から 100 までの整数の中で, 4 または 6 で割り切れる数の和は $\boxed{\text{アイウエ}}$ である.

4 で割り切れる数の和と 6 で割り切れる数の和を足して, そこから重複して数えてしまう, 最小公倍数である 12 で割り切れる数の和を引けばよい．すなわち

$$S_1 = 1 \text{ から } 100 \text{ までの } 4 \text{ の倍数の和}$$

$$S_2 = 1 \text{ から } 100 \text{ までの } 6 \text{ の倍数の和}$$

$$S_3 = 1 \text{ から } 100 \text{ までの } 12 \text{ の倍数の和}$$

とすると, 4 または 6 で割り切れる数の和 S は $S = S_1 + S_2 - S_3$ と書ける．
初項 a_1, 末項 a_n である等差数列の和の公式

$$\frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$$

を用いて S_1, S_2, S_3 を計算していく．$4 \leqq 4n \leqq 100$ とすると, $1 \leqq n \leqq 25$ であるから,

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (4 + 100) = 1300$$

また, 100 以下の 6 の倍数の最大値は 96 であるから $6 \leqq 6n \leqq 96$ とすると $1 \leqq n \leqq 16$ より

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot (6 + 96) = 816$$

最後に, 100 以下の 12 の倍数の最大値は 96 なので $12 \leqq 12n \leqq 96$ とすると $1 \leqq n \leqq 8$ より

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (12 + 96) = 432$$

以上から

$$S = S_1 + S_2 - S_3 = 1300 + 816 - 432 = 1684$$

【答】　**1684**

問題 007（バリエーション No.20）

初項 42, 公差 -5 の等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると, S_n は $n =$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき最大となり, その値は $\boxed{\text{アイウ}}$ である．

初項 42, 公差 -5 である等差数列の, 初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n = \frac{1}{2}n(2 \cdot 42 + (n-1) \cdot (-5))$$

が成り立つ．整理して平方完成すると

$$\begin{aligned} S_n &= -\frac{5}{2}n^2 + \frac{89}{2}n \\ &= -\frac{5}{2}\left(n - \frac{89}{10}\right)^2 + \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{89}{10}\right)^2 \\ &= -\frac{5}{2}\left(n - \frac{89}{10}\right)^2 + \frac{7921}{40} \end{aligned}$$

n は自然数であるから $8 < \dfrac{89}{10} < 9$ より, S_n は $n = 8$ または $n = 9$ のときに最大値をとる．

$$S_8 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (84 - 35) = 196$$

$$S_9 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot (84 - 40) = 198$$

よって S_n は $\boldsymbol{n = 9}$ のときに**最大値 198** をとる.
(注意)
上では $n = 8$ の場合の値と比べたが, $\dfrac{89}{10} = 8.9$ より, 2 次関数 S_n の軸が $n = 9$ のほうに近いので $n = 8$ と比べることなく, $n = 9$ で最大値をとることが分かる.

(別解)
初項 42, 公差 -5 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 42 + (n-1)(-5) = -5n + 47$$

第 n 項までの和 S_n は, $a_n \geqq 0$ かつ $a_{n+1} < 0$ をみたす n で最大となる.

$$-5n + 47 \geqq 0$$

とすると $n \leqq \dfrac{47}{5} = 9.4$ であるから, $a_9 = 2 > 0$ かつ $a_{10} = -3 < 0$. よって S_n は $n = 9$ で最大となる.