［コース ID：47］　基礎数学 BII

47.7　等比数列

47.7.1　等比数列

問題 001（バリエーション No.10）

初項 5, 公比 2 の等比数列の, 初項から第 $\boxed{\text{ア}}$ 項までの和は 1275 である.

初項 a_1, 公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

と表せる. 初項から第 n 項までの和を S_n とすると $r \neq 1$ のとき,

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + a_1 r + \cdots + a_1 r^{n-1} \\ &= a_1(1 + r + \cdots + r^{n-1}) \\ &= a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} \end{aligned}$$

初項 $a_1 = 5$, 公比 $r = 2$ を代入すると $S_n = 5(2^n - 1)$ が成り立つ.

$$5(2^n - 1) = 1275$$

とおくと, $2^n = 256 = 2^8$ より $n = 8$ であることが分かる.

【答】　第 8 項

問題 002（バリエーション No.30）

公比が正の等比数列の第 6 項が 729, 第 8 項が 6561 であるとき, この等比数列の第 9 項は $\boxed{\text{アイウエオ}}$ である.

初項 a_1, 公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

と表せる.

$$a_6 = a_1 r^5 = 729, \quad a_8 = a_1 r^7 = 6561$$

であるから, a_8 を a_6 で割ると

$$\begin{aligned} \frac{a_1 r^7}{a_1 r^5} &= \frac{6561}{729} \\ r^2 &= \frac{6561}{729} = 9 \end{aligned}$$

仮定から $r > 0$ なので $r = 3$ であり, また $a_1 = \dfrac{729}{3^5} = 3$ である. 第 9 項を求めると

$$a_9 = 3 \times 3^8 = 19683$$

【答】　**19683**

問題 003（バリエーション No.10）

公比が正の等比数列の初項から第 2 項までの和が 8, 初項から第 4 項までの和が 80 であるならば, この数列の初項は $\boxed{\text{ア}}$, 公比は $\boxed{\text{イ}}$ である.

初項を a_1, 公比を r とすると, $r \neq 1$ のとき, 第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

と表せる. 仮定から $r \neq 1$ なので

$$S_2 = \frac{a_1(1-r^2)}{1-r} = 8, \quad S_4 = \frac{a_1(1-r^4)}{1-r} = 80$$

S_4 を S_2 で割ると

$$\begin{aligned} \frac{1-r^4}{1-r^2} &= \frac{80}{8} \\ \frac{(1+r^2)(1-r^2)}{1-r^2} &= 10 \\ 1+r^2 &= 10 \\ r^2 &= 9 \end{aligned}$$

条件より公比が正であるので $\boldsymbol{r = 3}$ であり, また $\dfrac{a_1(1-3^2)}{1-3} = 8$ より $\boldsymbol{a_1 = 2}$ である.

【答】　**初項は 2, 公比は 3**

問題 004（バリエーション No.64）

以下はある等比数列の隣り合う 5 つの項を順に並べたものである. 空欄にあてはまる数を答えよ.

$\boxed{\text{アイ}}$, -45, $\boxed{\text{ウエオカ}}$, $\boxed{\text{キクケコサ}}$, -5625

等比数列 $\{a_n\}$ が

$$a_2 = -45, \quad a_5 = -5625$$

を満たしているとする.

等比数列なので一般項を $a_n = a_1 r^{n-1}$ とおくと, $a_2 = a_1 r, \ a_5 = a_1 r^4$ より,

$$\frac{a_5}{a_2} = r^3 = \frac{-5625}{-45} = 125 = 5^3$$

よって $r = 5$ であることが分かる. また, ここから初項 $a_1 = -\dfrac{45}{5} = -9$ であるので,

$$\begin{aligned} a_1 &= -9 \\ a_3 &= -9 \cdot 5^2 = -225 \\ a_5 &= -9 \cdot 5^3 = -1125 \end{aligned}$$

である.

【答】　**−9, −45, −225, −1125, −5625**

問題 005（バリエーション No.1）

初項 7, 公比 2 の等比数列を考える．1000 より小さい項の中で最大の値は $\boxed{\text{アイウ}}$ であり，それは第 $\boxed{\text{エ}}$ 項である．

仮定から一般項は $a_n = 7 \cdot 2^{n-1}$ と表せる．

$$7 \cdot 2^{n-1} < 1000$$

とすると $2^{n-1} < \dfrac{1000}{7} = 142.8\ldots$ であり $2^7 = 128,\ 2^8 = 256$ であるから $n-1 \leqq 7$, すなわち $n \leqq 8$ であることが分かる．
$n = 8$ のとき $a_8 = 7 \cdot 2^7 = 896$ となるので，これが 1000 より小さい項の中で最大の値である．

【答】　第 8 項で, 値 896 をとる.

問題 005（バリエーション No.4）

初項 3, 公比 2 の等比数列を考える．4 桁の自然数であるような項の数は $\boxed{\text{ア}}$ 個であり，そのうちで最大の値は $\boxed{\text{イウエオ}}$ である．

仮定から一般項は $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ と表せる．a_n が 4 桁の自然数であるとき

$$1000 \leqq a_n \leqq 9999$$

であるから

$$\frac{1000}{3} \leqq 2^{n-1} \leqq 3333$$

である．2^n の値を調べると

$$2^8 = 256,\ 2^9 = 512,\ 2^{10} = 1024,\ 2^{11} = 2048,\ 2^{12} = 4096$$

となるので a_n が 4 桁の自然数になるような項は $n = 10, 11, 12$ の 3 個であり，その中で最大の値は $a_{12} = 3 \cdot 2^{11} = 6144$ である．

【答】　3 個, 最大の値は 6144.

問題 006（バリエーション No.1）

等比数列 $\{a_n\}$: $4, 8, \cdots$ について，$a_k = 2048$ であるとき，初項から第 k 項までの和は $\boxed{\text{アイウエ}}$ である．

等比数列なので初項 4, 公比 2 である．等比数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 k 項 a_k までの和 S_k は

$$S_k = \frac{a_1(1-r^k)}{1-r} = \frac{a_1 - ra_k}{1-r}$$

と表せるので，$a_1 = 4,\ a_k = 2048,\ r = 2$ を代入すると

$$S_k = \frac{4 - 2 \cdot 2048}{1-2} = 4096 - 4 = 4092$$

【答】　4092

問題 006（バリエーション No.2）

等比数列 $\{a_n\}: 18, 6\sqrt{3}, 6, \cdots$ について, 初項から第 15 項までのうち, 奇数番目の項の和は $\dfrac{\boxed{\text{アイウエ}}}{\boxed{\text{オカキ}}}$ である.

等比数列なので, 初項 18, 公比 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ である. 数列 $\{b_m\}$ を

$$b_m = a_{2m-1} = 18 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2m-2} = 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}$$

と定めると, $\{b_m\}$ は $\{a_n\}$ の奇数番目の項を表す数列であり, 初項 18, 公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列である. $n = 15$ のとき $m = 8$ であるから $\{b_m\}$ の第 8 項までの和を考えればよく, その値は

$$\frac{18 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{3^8}\right)}{1 - \dfrac{1}{3}} = 18 \cdot \frac{3^8 - 1}{3^8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6560}{243}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{6560}{243}}$