［コース ID：47］　基礎数学 BII

47.10　漸化式, 数学的帰納法

47.10.1　漸化式, 数学的帰納法

問題 001（バリエーション No.1）

漸化式 $a_1 = 5,\ a_{k+1} = a_k - 3\ (k = 1, 2, 3, \cdots)$ で表される数列の一般項は,
$a_n =$ アイ $n +$ ウ である.

$a_{k+1} - a_k = -3$ より, 数列 $\{a_n\}$ は初項 5, 公差 -3 の等差数列である．よってその一般項は

$$a_n = -3n + 8$$

である.

【答】　$\boldsymbol{-3n + 8}$

問題 002（バリエーション No.47）

漸化式 $a_1 = 2,\ a_{k+1} = -3a_k\ (k = 1, 2, 3, \cdots)$ で表される数列の一般項は $a_n = xr^{n-1}$,
$x =$ ア , $r =$ イウ である.

$a_{k+1} = -3a_k$ より, 数列 $\{a_n\}$ は初項 5, 公比 -3 の等比数列である．よってその一般項は

$$a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$$

である.

【答】　$\boldsymbol{x = 2,\ r = -3}$

問題 003（バリエーション No.1）

漸化式 $a_1 = -5,\ a_{k+1} = 2a_k{+}1\ (k = 1, 2, 3, \cdots)$ で表される数列の一般項は $a_n = xr^{n-1}{+}y$,
$x =$ アイ , $r =$ ウ , $y =$ エオ である.

$a_{k+1} = 2a_k + 1$ の両辺の 1 を足すと

$$a_{k+1} + 1 = 2a_k + 2 = 2(a_k + 1)$$

よって数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_n + 1$ と定めると

$$b_1 = -4,\ b_{k+1} = 2b_k$$

$\{b_n\}$ は初項 -4, 公比 2 の等比数列であることが分かる．よってその一般項は $b_n = -4 \cdot 2^{n-1}$ である.
$a_n = b_n - 1$ であるから数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = -4 \cdot 2^{n-1} - 1$$

【答】　$\boldsymbol{x = -4,\ r = 2,\ y = -1}$

上の問題のように $a_{k+1} = ba_k + c$ (b, c は定数) の形の漸化式が与えられたとき, 適当な数を加えて

$$a_{k+1} + m = b(a_k + m)$$

の形に直し, 新しい数列 $\{a_n + m\}$ が等比数列になっていることを利用すれば一般項が求められる.
では, この m という値はどのように定めればよいだろうか？
上の式を展開して整理すると

$$a_{k+1} = ba_k + bm - m = ba_k + m(b-1)$$

$\{a_n\}$ は漸化式 $a_{k+1} = ba_k + c$ を満たしていたので, ここから

$$m = \frac{c}{b-1}$$

であることが分かる. $b = 1$ のときは $\{a_n\}$ は等差数列になるので, 一般項は簡単に求まる.

問題 004（バリエーション No.6）

漸化式 $a_1 = 1,\ a_{k+1} = a_k + 2k + 3$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ の一般項は,
$a_n = (n -$ **ア** $)(n +$ **イ** $) +$ **ウ** である.

数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

と定めると

$$b_k = 2k + 3,\ \text{かつ}\ a_{n+1} = a_1 + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

が成り立つ.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+3) = n(n+1) + 3n = n(n+4)$$

であるから

$$a_{n+1} = a_1 + n(n+4) = 1 + ((n+1)-1)((n+1)+3)$$

よって $a_n = (n-1)(n+3) + 1$ である.

(注意)
一般項の, この表し方は 1 通りではない. 例えば

$$a_n = (n-2)(n+4) + 6$$

としても, 展開すればどちらも $a_n = n^2 + 2n - 2$ となる. これはマークシート方式の問題としての不備です. ごめんなさい.

【答】 $\boldsymbol{a_n = (n-1)(n+3) + 1}$