［コース ID：47］　基礎数学 BII

47.1　場合の数

47.1.1　場合の数

問題 001（バリエーション No.10）

2048 の約数の個数は $\boxed{\text{アイ}}$ 個である.

2048 を素因数分解すると

$$2048 = 2^{11}$$

である. よって約数は

$$2^0,\ 2^1,\ \cdots, 2^{11}$$

の 12 個である.

【答】　12

問題 001（バリエーション No.150）

1470 の約数の個数は $\boxed{\text{アイ}}$ である.

1470 を素因数分解すると

$$1470 = 2 \times 3 \times 5 \times 7^2$$

である. d を 1470 の約数の 1 つとしたとき, d は

$$d = 2^{p_1} \times 3^{p_2} \times 5^{p_3} \times 7^{p_4}$$

という形に素因数分解される. ここで

$$p_1 = 0 \text{ または } 1$$

$$p_2 = 0 \text{ または } 1$$

$$p_3 = 0 \text{ または } 1$$

$$p_4 = 0 \text{ または } 1 \text{ または } 2$$

である. 逆にある数 d がこの条件を満たすように素因数分解されるとき, d は 1470 の約数になる. よって 1470 の約数の数は

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$$

より 24 個である.

【答】

問題 002（バリエーション No.2）

4 桁の自然数のうちで 1135, 7579 のように各位の数が全て奇数からなるものは $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りある.

各位は 1,3,5,7,9 の 5 通りの数をとりうるので, その場合の数は

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

より 625 通りである.

【答】　625 通り

問題 002（バリエーション No.10）

1 から 4 までの数字を使って 3 桁の数を作るとき, 同じ数字を使ってよいのなら $\boxed{\text{アイ}}$ 通りの数ができる.

各位は 1,2,3,4 の 4 通りの数をとりうるので, その場合の数は

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

より 64 通りである.

【答】　64 通り

問題 002（バリエーション No.20）

A 地点から B 地点に行く方法が 7 通りあり, B 地点から C 地点に行く方法が 2 通りあるとき, A 地点から C 地点に行く方法は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りある.

A 地点から B 地点に行く方法を 1 つ固定するたびに, B 地点から C 地点に行く方法が 2 通りずつ存在する, A 地点から B 地点に行く方法が 7 通りあることから A 地点から C 地点に行く方法は

$$7 \times 2 = 14$$

より 14 通り存在する.

【答】　14 通り

問題 002（バリエーション No.43）

$x + y + z = 11$ を満たす正の整数 x, y, z の組 (x, y, z) は全部で $\boxed{\text{アイ}}$ 組ある.

$1 \leqq y, z$ より $1 \leqq x \leqq 9$ である. また, x を固定したとき,

$$y + z = 11 - x$$

を満たす y, z の組を考えると, $1 \leqq z$ より

$$1 \leqq y \leqq 10 - x$$

となるので y は $(10 - x)$ 通りの値をとりうる. x と y が決まれば z の値も決まるので, 結局 x の値を固定した時, $y + z = 11 - x$ を満たす y, z の組の数は $(10 - x)$ 組存在する.
$1 \leqq x \leqq 9$ であったらから, $x + y + z = 11$ を満たす x, y, z の組の数は

$$9 + 8 + 7 + \cdots + 2 + 1 = 45$$

より 45 組存在する

【答】　45 組

問題 002（バリエーション No.49）

12 を 3 つの正の整数の和として考えると, 3 つの正の整数の組み合わせ方は足し合わせる順序を無視すれば全部で $\boxed{\text{アイ}}$ 通りある.

3 つの正の整数の組を (x, y, z) とすると, 足し合わせる順序を無視するので, 例えば $(2, 4, 6)$ と $(4, 6, 2)$ は同一視される．このとき, 求める組み合わせの総数は以下を満たす正整数の組 (x, y, z) の総数と等しい.

$$x + y + z = 12 \text{ かつ } x \leqq y \leqq z$$

$1 \leqq x$ であり, $x \leqq y, z$ であるから $x \leqq 4$ である.
x を 1 つ固定すると, $y + z = 12 - x$ であり, $x \leqq y \leqq z$ であるから y は

$$x = 1 \text{ のとき } y = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ の 5 通り}$$

$$x = 2 \text{ のとき } y = 2, 3, 4, 5 \text{ の 4 通り}$$

$$x = 3 \text{ のとき } y = 3, 4 \text{ の 2 通り}$$

$$x = 4 \text{ のとき } y = 4 \text{ の 1 通り}$$

の値をとりうる．以上から, 求める組み合わせの総数は

$$5 + 4 + 2 + 1 = 12$$

より 12 通りである.

【答】　12 通り

問題 002（バリエーション No.54）

大小の 2 つのさいころを投げたとき, 目の和が 6 の倍数になる場合は $\boxed{\text{ア}}$ 通りある.

和の最大値は $6 + 6 = 12$ であるから, 目の和が 6 になる場合と 12 になる場合を考えればよい.
目の和が 6 になる場合は
(大きいさいころの目, 小さいさいころの目) $= (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ の 5 通り.
目の和が 12 になる場合は
(大きいさいころの目, 小さいさいころの目) $= (6, 6)$ の 1 通り.
よって 6 の倍数になる場合は $5 + 1 = 6$ 通りである.

【答】　6 通り

問題 002（バリエーション No.60）

大小の 2 つのさいころを投げたとき, 目の和が 8 以上になる場合は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りある.

大きいさいころの出た目を x, 小さいさいころの出た目を y とすると, 目の和が 8 以上であることから

$$2 \leqq x, y \leqq 6$$

である．x を固定した時, y のとりうる値の範囲は

$$8 - x \leqq y \leqq 6$$

の $(x-1)$ 通り (ただし $2 \leqq x \leqq 6$) であるから, 求める場合の数は

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

より 15 通りである．

【答】　15 通り

問題 002（バリエーション No.79）

大小の 2 つのさいころを投げたとき, 目の積が 6 の倍数になる場合は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りある．

大きいさいころの出た目を x, 小さいさいころの出た目を y とする．積の最大値は $6 \times 6 = 36$ に注意すると

$$\text{目の積が 6 のとき，}\ (x, y) = (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\ \text{の 4 通り}$$
$$\text{目の積が 12 のとき，}\ (x, y) = (2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)\ \text{の 4 通り}$$
$$\text{目の積が 18 のとき，}\ (x, y) = (3, 6), (6, 3)\ \text{の 2 通り}$$
$$\text{目の積が 24 のとき，}\ (x, y) = (4, 6), (6, 4)\ \text{の 2 通り}$$
$$\text{目の積が 30 のとき，}\ (x, y) = (5, 6), (6, 5)\ \text{の 2 通り}$$
$$\text{目の積が 36 のとき，}\ (x, y) = (6, 6)\ \text{の 1 通り}$$

よってその総数は $4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 1 = 15$ 通りである．
(別解)
求める場合の数を重複なく数えると,

$$x = 2\ \text{または}\ 4\quad\text{かつ}\quad y = 3\quad(2\ \text{通り})$$
$$x = 3\quad\text{かつ}\quad y = 2\ \text{または}\ 4\quad(2\ \text{通り})$$
$$x = 6\quad\text{または}\quad y = 6\quad(11\ \text{通り})$$

よって求める場合の数は $2 + 2 + 11 = 15$ 通りである．

【答】　15 通り

問題 002（バリエーション No.80）

大小の 2 つのさいころを投げたとき, 目の積が 2 の倍数になる場合は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りある．

目の積が 2 の倍数 (偶数) になる場合の数を求めるには, 全体の場合の数から奇数になる場合の数を引けばよい．

$$(\text{目の積が偶数になる場合の数}) = (\text{全体の場合の数}) - (\text{目の積が奇数になる場合の数})$$

目の出方は全部で 36 通りであり, 目の積が奇数になるのは 2 つのさいころの目がどちらも奇数のときなので $3 \times 3 = 9$ 通りである．よって求める場合の数は $36 - 9 = 27$ 通りである．

【答】　27 通り

問題 002（バリエーション No.84）

大中小の 3 つのさいころを投げたとき, 目の和が 15 以上になる場合は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りある.

大, 中, 小のさいころの出た目をそれぞれ x, y, z とすると, 求める場合の数は次を満たす整数の組 (x, y, z) の総数に等しい.

$$15 \leqq x+y+z \quad \text{かつ} \quad 1 \leqq x, y, z \leqq 6$$

$y+z \leqq 12$ であるから $x \geqq 15-(y+z) \geqq 15-12=3$. よって $3 \leqq x \leqq 6$ である.

$$x=3 \text{ のとき } (y,z)=(6,6) \text{ の 1 通り}$$

$$x=4 \text{ のとき } (y,z)=(5,6),(6,5),(6,6) \text{ の 3 通り}$$

$$x=5 \text{ のとき } (y,z)=(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6) \text{ の 6 通り}$$

$$x=6 \text{ のとき } (y,z)=(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6) \text{ の 10 通り}$$

よって求める場合の数は $1+3+6+10=20$ 通りである.
(別解)
目の和の最大値は $6+6+6=18$ であるから目の和が 15,16,17,18 になる場合をそれぞれ数えればよい.
目の和が 15 のとき

$$(x,y,z)=(3,6,6),(4,5,6),(4,6,5),(5,4,6),(5,5,5),(5,6,4),(6,3,6),(6,4,5),(6,5,4),(6,6,3)$$

の 10 通り,
目の和が 16 のとき

$$(x,y,z)=(4,6,6),(5,5,6),(5,6,5),(6,4,6),(6,5,5),(6,6,4)$$

の 6 通り,
目の和が 17 のとき

$$(x,y,z)=(5,6,6),(6,5,6),(6,6,5)$$

の 3 通り,
目の和が 18 のとき

$$(x,y,z)=(6,6,6)$$

の 1 通りである. よって求める場合の数は $10+6+3+1=20$ 通りである.

【答】　20 通り