［コース ID：47］　基礎数学 BII

47.5　二項定理

47.5.1　二項定理

問題 001（バリエーション No.122）

$(x-4)^5$ の展開式における x^2 の項の係数は $\boxed{\text{アイウエ}}$ である.

二項定理より $(ax+b)^n$ を展開した時における x^k の係数は ${}_n\mathrm{C}_k a^k b^{n-k}$ である.
$a=1,\ b=-4,\ n=5,\ k=2$ とすると

$$ {}_5\mathrm{C}_2(-4)^3 = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\times(-64) = -640 $$

よって x^2 の係数は -640 である.

【答】　-640

問題 001（バリエーション No.408）

$(3x-2y)^5$ の展開式における x^3y^2 の項の係数は $\boxed{\text{アイウエ}}$ である.

二項定理より $(ax+by)^n$ を展開した時における $x^k y^{n-k}$ の係数は ${}_n\mathrm{C}_k a^k b^{n-k}$ である.
$a=3,\ b=-2,\ n=5,\ k=3$ とすると

$$ {}_5\mathrm{C}_3\times 3^3\times(-2)^2 = 10\times 27\times 4 = 1080 $$

よって x^3y^2 の係数は 1080 である.

【答】　1080

問題 002（バリエーション No.281）

$(x+y+z)^6$ の展開式における x^2yz^3 の項の係数は $\boxed{\text{アイ}}$ である.

展開式における各項は, 各括弧の中から項を 1 つずつ選び, それらを掛け合わせたものとして得られる.

$$ \begin{array}{ccccccccccc} (x+y+z)^6 & = & (x+y+z) & \times & (x+y+z) & \times & \cdots & \times & (x+y+z) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \leftarrow & 1\text{ つ選ぶ} \\ & & x & \times & y & \times & \cdots & \times & x & = & x^2yz^3 \end{array} $$

よって x^2yz^3 の係数は, 各括弧から x を 2 つ, y を 1 つ, z を 3 つ選ぶ選び方の総数に等しい.
x の選び方は ${}_6\mathrm{C}_2=15$ 通り, x を選んだ後の y の選び方は ${}_4\mathrm{C}_1=4$ 通りなので, x^2yz^3 の係数は $15\times 4=60$ となる.

【答】　60

上と同様に考えることで, 一般に $(ax+by+cz)^n$ を展開した時の $x^p y^q z^r$ (ただし, $p+q+r=n$) の係数は

$$\frac{n!}{p!\ q!\ r!}a^p b^q c^r$$

で与えられることが分かる. これを三項定理という.(基礎数学 BII：いろいろな順列を参照)

問題 003（バリエーション No.100）

$(x^2+x-1)^6$ の展開式における x^8 の項の係数は $\boxed{\textbf{アイウ}}$ である.

$(x^2+x-1)^6$ を展開した時に現れる項は

$$(x^2)^p x^q = x^{2p+q}$$

という形をしている. ここで, $0 \leqq p,\ 0 \leqq q$ かつ, $p+q \leqq 6$ である.
この条件を満たしつつ $2p+q=8$ となる (p,q) の組み合わせは

$$(p,q)=(4,0),\ (3,2),\ (2,4)$$

の 3 通りである. $r=6-(p+q)$ として, 各場合において上で述べた三項定理から係数を求めると

$$(p,q,r)=(4,0,2)\quad \text{のとき}\quad \frac{6!}{4!\ 0!\ 2!}(x^2)^4\cdot x^0\cdot(-1)^2=15x^8$$

$$(p,q,r)=(3,2,1)\quad \text{のとき}\quad \frac{6!}{3!\ 2!\ 1!}(x^2)^3\cdot x^2\cdot(-1)=-60x^8$$

$$(p,q,r)=(2,4,0)\quad \text{のとき}\quad \frac{6!}{2!\ 0!\ 4!}(x^2)^2\cdot x^4\cdot(-1)^0=15x^8$$

よって x^8 の係数は $15-60+15=-30$ である.

【答】　-30