［コース ID：47］　基礎数学 BII

47.3　組合せ

47.3.1　組合せ

問題 001（バリエーション No.40）

${}_{10}\mathrm{C}_6 = \boxed{\text{アイウ}}$ である.

定義より

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}{r \times (r-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$$

であるから $n = 10,\ r = 6$ を代入すると

$${}_{10}\mathrm{C}_6 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

【答】　210

問題 001（バリエーション No.59）

${}_{12}\mathrm{C}_{10} = \boxed{\text{アイ}}$ である.

定義より

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}{r \times (r-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$$

であるが, ここで r を $n-r$ 置き換えると

$${}_n\mathrm{C}_{n-r} = \frac{n!}{(n-(n-r))!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_n\mathrm{C}_r$$

となるので ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$ が成り立つ.

$n = 12,\ r = 10$ とすると $n - r = 2$ より ${}_{12}\mathrm{C}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_2 = \dfrac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$

【答】　66

問題 002（バリエーション No.1）

6 枚の異なるカードの中から 2 枚を選ぶとき, $\boxed{\text{アイ}}$ 通りの組み合わせがある.

6 つの物から 2 つを選ぶので選び方は

$${}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

より 15 通りである.

【答】　15 通り

問題 002（バリエーション No.106）

男子 4 人, 女子 6 人の中から 6 人の役員を選ぶとき, 男子から 2 人, 女子から 4 人選ぶとすれば, 役員の選び方は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りある.

男子 4 人の中から役員を 2 人選ぶ選び方は

$${}_4\mathrm{C}_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

より 6 通りであり, 女子 6 人の中から役員を 4 人選ぶ選び方は

$${}_6\mathrm{C}_4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$$

より 15 通りである. よって役員の選び方は $6 \times 15 = 90$ 通りである.

【答】　90 通り

問題 002（バリエーション No.151）

正 12 角形の対角線は $\boxed{\text{アイ}}$ 本である.

正 12 角形の異なる 2 頂点の選び方は ${}_{12}\mathrm{C}_2 = 66$ 通りある. すなわち, 正 12 角形の異なる 2 頂点を結ぶ線分は 66 本存在するが, この中で 12 本は正 12 角形の辺に対応する. よって

$$66 - 12 = 54$$

より対角線は 54 本存在する.

【答】　54 本

問題 002（バリエーション No.171）

9 枚の異なるカードを, 4 枚, 3 枚, 2 枚の 3 組に分ける方法は $\boxed{\text{アイウエ}}$ 通りある.

9 枚のカードから 4 枚選ぶ選び方は

$${}_9\mathrm{C}_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

より 126 通りあり,
選ばなかった 5 枚の中から 3 枚のカードを選ぶ選び方は ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通りである.
よってカードの分け方は $126 \times 10 = 1260$ 通りある

【答】　1260 通り

問題 002（バリエーション No.176）

8 枚の異なるカードを 2 枚ずつ 4 つの組に分ける場合 $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りの分け方がある.

- 8 枚の中から 2 枚選ぶ選び方は ${}_8\mathrm{C}_2 = 28$ 通り
- 選ばなかった 6 枚の中から 2 枚選ぶ選び方は ${}_6\mathrm{C}_2 = 15$ 通り

- さらに選ばなかった 4 枚の中から 2 枚選ぶ選び方は ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通り

カードを選んだ順番は無視するので, カードの分け方は

$$\frac{28 \times 15 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 105$$

より 105 通りである.

(詳解)
上で述べた数え方をもう少し詳しく述べる.
今, 1 から 8 までの数を 2 つずつ 4 つの組

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3),\ (x_4, y_4)$$

に分けることを考える. 例えば $(1,2),\ (3,4),\ (5,6),\ (7,8)$ は分け方の例の 1 つである.
ここで例えば $(1,2)$ と $(2,1)$ は同じものとみなし,
$(1,2),\ (3,4),\ (5,6),\ (7,8)$ と $(3,4),\ (1,2),\ (5,6),\ (7,8)$ は同じ分け方とみなしていることに注意する.
上で行った分け方は, 例えば

- 8 枚の中から 1 と 2 を選ぶ.
- 選ばなかった 6 枚の中から 3 と 4 を選ぶ.
- さらに選ばなかった 4 枚の中から 5 と 6 を選ぶ.

のようにカードを選んで 4 つの組に分けているが, これでは例えば

- 8 枚の中から 3 と 4 を選ぶ.
- 選ばなかった 6 枚の中から 1 と 2 を選ぶ.
- さらに選ばなかった 4 枚の中から 5 と 6 を選ぶ.

といった本来区別しない選び方を重複して数えてしまう.
では, どれくらい重複して数えてしまうかを考えると, それは 4 つの組 $(1,2),\ (3,4),\ (5,6),\ (7,8)$ を 1 列に並べるときの並べ方の総数である $4!$ に等しい. 他の分け方についても同様なので, 最終的な解答は $4!$ で割ったものになる.

【答】　105 通り

問題 002（バリエーション No.187）

A,B,C,D,E,F,G,H,I の 9 文字から 4 文字を選ぶとき, C が選ばれる方法は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りある.

選ぶ 4 文字の中の 1 文字は C であるので, 求める選び方の総数は, 残りの 8 文字の中から 3 文字選ぶ選び方の総数に等しい.

$${}_8\mathrm{C}_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

よって 56 通り.

【答】　56 通り

問題 002（バリエーション No.200）

A,B,C,D,E,F,G,H,I の 9 文字から 6 文字を選ぶとき, A が選ばれない方法は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りある.

A 以外の 8 文字の中から 6 文字を選ぶので, 求める選び方の総数は

$${}_8\mathrm{C}_6 = {}_8\mathrm{C}_2 = 28$$

より 28 通りある.

【答】　28 通り

問題 002（バリエーション No.210）

A,B,C,D,E,F,G,H,I の 9 文字から 5 文字を選ぶとき, B が選ばれ, E が選ばれない方法は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りある.

選ぶ 5 文字の中の 1 文字は B なので, 求める選び方の総数は, B と E 以外の 7 文字から 4 文字を選ぶ選び方の総数に等しい.

$${}_7\mathrm{C}_4 = {}_7\mathrm{C}_3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$$

よって求める選び方の総数は 35 通りある.

【答】　35 通り

問題 002（バリエーション No.231）

男子 7 人, 女子 3 人の中から 5 人を選ぶとき, 女子が少なくとも 1 人含まれる選び方は $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りある.

”女子が少なくとも 1 人含まれる”の否定は”女子が含まれない”であるので

$$\begin{aligned}(\text{選び方の総数}) &= (\text{女子が少なくとも 1 人含まれる選び方の総数}) \\ &\qquad + (\text{女子が含まれない選び方の総数})\end{aligned}$$

となる.
男子 7 人, 女子 3 人の中から 5 人を選ぶ選び方の総数は, 10 人から 5 人を選ぶ選び方の総数に等しいので

$${}_{10}\mathrm{C}_5 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 252$$

より 252 通りある.
また, 女子が含まれない選び方とは, 男子 7 人の中から 5 人を選ぶ選び方と等しいので, その総数は

$${}_7\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_2 = 21$$

より 21 通り存在する.
よって女子が少なくとも 1 人含まれる選び方は $252 - 21 = 231$ 通りある.

【答】　231 通り