［コース ID：47］　基礎数学 BII

47.4　いろいろな順列

47.4.1　いろいろな順列

問題 001（バリエーション No.1）

1 から 3 までの数字を重複を許して使い, 6 桁の整数を作るとき, 整数は全部で $\boxed{\text{アイウ}}$ 個作ることができる.

6 桁の整数を作るとき, 各桁の数字の選び方は 1,2,3 の 3 通りなので, 作れる整数は $3^6 = 729$ 種類ある.

【答】　729 **個**

問題 001（バリエーション No.34）

文字 A,A,B,B,C,C,C,C を 1 列に並べる並べ方は $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りである.

文字 A を 2 つ, 左から何番目と何番目に置くかを考えるとその置き方は ${}_8\mathrm{C}_2$ 通りある.
そのあと, 文字 B を 2 つ, 何番目と何番目に置くかを考えるとその置き方は ${}_6\mathrm{C}_2$ 通りある.
よって 1 列に並べる並べ方は

$${}_8\mathrm{C}_2 \times \_6\mathrm{C}_2 = \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}\cdot\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 28\times 15 = 420$$

より 420 通り.

(図解)
8 つの〇の場所に文字 A,B,C を置いていく.

〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇	
→ 〇 A 〇 〇 〇 A 〇 〇	文字 A の置き方は ${}_8\mathrm{C}_2$通り
→ 〇 A B B 〇 A 〇 〇	文字 B の置き方は ${}_6\mathrm{C}_2$通り
→ C A B B C A C C	残ったところに C を置く

【答】　420 通り

一般に, 文字 A が p 個, B が q 個, C が r 個あるときの, これらの文字の並べ方を考えると, 上と同じ議論で

- A の置き方は ${}_n\mathrm{C}_p$ 通り
- B の置き方は ${}_{n-p}\mathrm{C}_q$ 通り

なので, 並べ方の総数は $n = p + q + r$ として

$${}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q = \frac{n!}{p!(n-p)!}\cdot\frac{(n-p)!}{q!(n-p-q)!} = \frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$

と表される.
さらに一般に k 種類のものがそれぞれ p_1 個, p_2 個, $\cdots$, p_k 個ずつあるとき, これらを 1 列に並べる並べ方の総数は $n = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$ として

$$\frac{n!}{p_1!\ p_2!\ \cdots p_k!}$$

と表される. 証明は上の 3 文字 $(k = 3)$ のときと同様である.

問題 001（バリエーション No.68）

8 人のなかから 4 人を選んで円形のテーブルの着席させる方法は全部で **アイウ** 通りある.

8 人から 4 人選ぶ選び方は全部で ${}_8\mathrm{C}_4 = 70$ 通りある. それぞれに対して円形のテーブルへの座らせ方は

$$\frac{4!}{4} = 3! = 6$$

より 6 通り存在するので, 求める方法は全部で $70 \times 6 = 420$ 通りある.

(図解)
円形に並べる場合, 回転して一致するものは同一視される. すなわち, 以下の並べ方は全て同じ並べ方とみなす.

$$\begin{matrix} A & B \\ C & D, \end{matrix} \qquad \begin{matrix} C & A \\ D & B, \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D & C \\ B & A, \end{matrix} \qquad \begin{matrix} B & D \\ A & C \end{matrix}$$

上の問題では 4 人の座り方の総数 4! を回転による重複 4 で割って解答を求めている.

また,

”4 人のうちの 1 人の場所を固定して,残りの 3 人の座り方を決める”

というような考え方をしてもよい. すなわち, 上の図でいうと A を左上に固定して, 残りの 3 文字の置き方の総数を数えるのである. この場合 3 文字の並べ方になるのでその総数は

$$(4-1)! = 3! = 6$$

となる.

【答】　420 通り

問題 001（バリエーション No.83）

男子 2 人, 女子 5 人の 7 人が手をつないで輪をつくるとき, 男子 2 人が隣り合うような輪の作り方は **アイウ** 通りある.

男子の 1 人の気持ちになって輪を作ったときを想像してみるとわかりやすいかもしれない.
輪を作るときに他の 6 人の並び方は

- もう 1 人の男子が自分の右隣にいるか, 左隣にいるか,
- 女子は自分から見て左から右にどのように並んでいるか,

で決まることが分かる.
男子 2 人の並ばせ方は 2 通り, 女子の並ばせ方は $5! = 120$ 通りあるので, 輪の作り方は $2 \times 120 = 240$ 通りある.

【答】　240 通り

問題 002（バリエーション No.3）

大人 3 人が円形に並ぶ場合, その並び方は全部で $\boxed{\text{ア}}$ 通りである.
また, 大人 3 人, 子供 3 人の合計 6 人が円形に並ぶ場合, 大人と子供が交互に並ぶような並び方は全部で $\boxed{\text{イウ}}$ 通りである.

円形に並ぶので大人の 1 人を固定すると残りの 2 人の並ばせ方は $2! = \mathbf{2}$ 通りである.
大人 3 人を A,B,C とすると, A と B の間に入る子供の選び方は 3 通り, 残った 2 人から B と C の間に入る子供の選び方は 2 通りある.
大人の並び方も合わせると, 求める並び方は $2 \times 3 \times 2 = \mathbf{12}$ 通りである.

【答】　2 通り, 12 通り

問題 003（バリエーション No.6）

赤, 青, 白, 黒の 4 種類の玉がたくさんある.
この中から 6 個の球を選ぶ方法は全部で $\boxed{\text{アイ}}$ 通りである.

次のように考える. まず目の前に 6 個の無色な球が並んでいるとする.

○ ○ ○ ○ ○ ○

これら 6 個の玉の間の 3 箇所に仕切りを入れる.

○ ○ | ○ ○ | ○ | ○

ただし, 仕切りは下図のように左端や右端に入れてもよいし, 仕切りが 2 つ並んでもよいとする.

| ○ ○ ○ ○ ○ || ○

仕切りで区切られている玉を左から順に赤, 青, 白, 黒に塗り分ける.

赤 赤 | 青 青 | 白 | 黒

より厳密にいうと, 仕切りを左から a, b, c としたとき

- a の左側にある玉を赤
- a と b の間にある玉を青
- b と c の間になる球を白
- c の右側にある玉を黒

にそれぞれ塗り分ける.
6 個の玉の選び方の総数は, このようにして玉を塗り分けるときの塗り分け方の総数に等しく, それは仕切りの入れ方の総数に一致する.
仕切りの入れ方の総数は, 6 個の "○" と 3 個の " | " を 1 列に並べる並べ方の総数であるから

$$ {}_9\mathrm{C}_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 $$

よって 6 個の玉の選び方は 84 通りある.

【答】　84 通り

同様の考え方をすることで一般に n 種類あるものの中から重複を許して r 個のものを選ぶ選び方の総数は

$$ {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r $$

と表される．入れる仕切りは $n-1$ 個であることに注意する．