［コース ID：47］　基礎数学 BII

47.8　数列の和, 階差数列

47.8.1　数列の和, 階差数列

問題 001（バリエーション No.1）

$$\sum_{k=1}^{n}(k+6)=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}n\left(n+\boxed{\text{ウエ}}\right)$$

累乗の和の公式

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

を用いて

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k+6)&=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}6\\&=\frac{1}{2}n(n+1)+6n\\&=\frac{1}{2}n(n+13)\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+13)}$

問題 002（バリエーション No.1）

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+4)=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}n(\boxed{\text{ウ}}\,n+\boxed{\text{エオ}})$$

累乗の和の公式を用いて

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(3k+4)&=3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}4\\&=\frac{3}{2}n(n+1)+4n\\&=\frac{1}{2}n(3n+11)\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{\frac{1}{2}n(3n+11)}$

問題 003（バリエーション No.1）

$$\sum_{k=1}^{n}(5k+5)=\frac{\boxed{\text{ア}}\,n(n+\boxed{\text{イ}})}{\boxed{\text{ウ}}}$$

累乗の和の公式から

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(5k+5) &= 5\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}5\\ &= \frac{5}{2}n(n+1)+5n\\ &= \frac{5n(n+3)}{2}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{5n(n+3)}{2}}$

問題 004（バリエーション No.24）

$$\sum_{k=1}^{n}(9k+10)=\frac{n(\boxed{\text{ア}}\,n+\boxed{\text{イウ}})}{\boxed{\text{エ}}}$$

累乗の和の公式を用いて

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(9k+10) &= 9\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}10\\ &= \frac{9}{2}n(n+1)+10n\\ &= \frac{n(9n+29)}{2}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{n(9n+29)}{2}}$

問題 006（バリエーション No.1）

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+6)=n(n+\boxed{\text{ア}})$$

累乗の和の公式から

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k+6) &= 2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}6\\ &= n(n+1)+6n\\ &= n(n+7)\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{n(n+7)}$

問題 007（バリエーション No.25）

$$\sum_{k=1}^{n}(10k+4)=n(\boxed{\text{ア}}\,n+\boxed{\text{イ}})$$

累乗の和の公式から

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(10k+4) &= 10\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}4\\ &= 5n(n+1)+4n\\ &= n(5n+9)\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{n(5n+9)}$

問題 010（バリエーション No.30）

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+5k+4)=\frac{n(n^2+\boxed{\text{ア}}\,n+\boxed{\text{イウ}}\,)}{\boxed{\text{エ}}}$$

累乗の和の公式

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

を用いて

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k^2+5k+4) &= \sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}4\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{5}{2}n(n+1)+4n\\ &= \frac{n}{6}\big((2n^2+3n+1)+15(n+1)+24\big)\\ &= \frac{n}{6}\big(2n^2+18n+40\big)\\ &= \frac{n(n^2+9n+20)}{3}\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{\dfrac{n(n^2+9n+20)}{3}}$

問題 012（バリエーション No.1）

$$\sum_{k=1}^{n}(2k^2+2k+6)=\frac{\boxed{\text{ア}}\,n(n^2+\boxed{\text{イ}}\,n+\boxed{\text{ウエ}}\,)}{\boxed{\text{オ}}}$$

累乗の和の公式を用いて

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k^2+2k+6)&=2\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}6\\&=\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)+n(n+1)+6n\\&=\frac{n}{3}\left((2n^2+3n+1)+3(n+1)+18\right)\\&=\frac{n}{3}\left(2n^2+6n+22\right)\\&=\frac{2n(n^2+3n+11)}{3}\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{2n(n^2+3n+11)}{3}}$

問題 013（バリエーション No.1）

$$\sum_{k=12}^{18}(k+6)=\boxed{\text{アイウ}}$$

まず, 累乗の和の公式から

$$\sum_{k=1}^{n}(k+6)=\frac{1}{2}n(n+1)+6n=\frac{1}{2}n(n+13)$$

よって $n=18$ までの和は

$$\sum_{k=1}^{18}(k+6)=\frac{1}{2}\cdot 18\cdot 31=279$$

であり, $n=11$ までの和は

$$\sum_{k=1}^{11}(k+6)=\frac{1}{2}\cdot 11\cdot 24=132$$

であるから, 差をとれば

$$\sum_{k=12}^{18}(k+6)=\sum_{k=1}^{18}(k+6)-\sum_{k=1}^{11}(k+6)=279-132=147$$

(別解)

$k=1$ から始まるように式を変形すると

$$\sum_{k=12}^{18}(k+6)=18+19+\cdots+23+24=\sum_{k=1}^{7}(k+17)$$

ここで

$$\sum_{k=1}^{n}(k+17)=\frac{1}{2}n(n+1)+17n=\frac{1}{2}n(n+35)$$

なので $n = 7$ とすれば

$$\sum_{k=1}^{7}(k+17) = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 42 = 147$$

【答】　147

問題 013（バリエーション No.77）

$\displaystyle\sum_{k=12}^{19}(8k-7) =$ $\boxed{\text{アイウ}}$

まず $k = 1$ から n までの和を求めると

$$\sum_{k=1}^{n}(8k-7) = 4n(n+1) - 7n = n(4n-3)$$

よって

$$\begin{aligned}\sum_{k=12}^{19}(8k-7) &= \sum_{k=1}^{19}(8k-7) - \sum_{k=1}^{11}(8k-7)\\ &= 19\cdot(4\cdot 19-3) - 11\cdot(4\cdot 11-3)\\ &= 1387 - 451\\ &= 936\end{aligned}$$

(別解)

$k = 1$ から始まるように式を変形する. $k' = k - 11$ とすると $k = k' + 11$ なので

$$\sum_{k=12}^{19}(8k-7) = \sum_{k'=1}^{8}(8(k'+11)-7) = \sum_{k'=1}^{8}(8k'+81)$$

ここで

$$\sum_{k=1}^{n}(8k+81) = 4n(n+1) + 81n = n(4n+85)$$

なので, $n = 8$ とすれば

$$\sum_{k=12}^{19}(8k-7) = \sum_{k'=1}^{8}(8k'+81) = 8\cdot(4\cdot 8+85) = 936$$

【答】　936

問題 013（バリエーション No.200）

$\displaystyle\sum_{k=5}^{15}(3k^2+4k+5) =$ $\boxed{\text{アイウエ}}$

$k=1$ から n までの和を求めると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(3k^2+4k+5)&=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+5n\\&=\frac{n}{2}\left((2n^2+3n+1)+4(n+1)+10\right)\\&=\frac{n}{2}(2n^2+7n+15)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{15}(3k^2+4k+5)&=\sum_{k=1}^{15}(3k^2+4k+5)-\sum_{k=1}^{4}(3k^2+4k+5)\\&=\frac{15}{2}(2\cdot15^2+7\cdot15+15)-2(2\cdot4^2+7\cdot4+15)\\&=4275-150=4125\end{aligned}$$

(別解)

$k'=k-4$ とすると $k=k'+4$ より

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{15}(3k^2+4k+5)&=\sum_{k'=1}^{11}\left(3(k'+4)^2+4(k'+4)+5\right)\\&=\sum_{k'=1}^{11}(3k'^2+28k'+69)\\&=\frac{1}{2}\cdot11\cdot(11+1)\cdot(22+1)+14\cdot11\cdot(11+1)+69\cdot11\\&=1518+1848+759=4125\end{aligned}$$

【答】　4125

問題 0014（バリエーション No.1）

数列

$$2\cdot8,\ 3\cdot11,\ 4\cdot14,\ 5\cdot17,\ 6\cdot20,\cdots$$

の第 n 項までの和は

$$\frac{n(\boxed{\text{ア}}\,n^2+\boxed{\text{イウ}}\,n+\boxed{\text{エオ}})}{\boxed{\text{カ}}}$$

である.

数列を $\{a_n\}$ とすると一般項は

$$a_n=(n+1)(3n+5)=3n^2+8n+5$$

と書けるので, 第 n 項までの和を求めると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(3k^2+8k+5)&=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)+4n(n+1)+5n\\&=\frac{n}{2}\left((2n^2+3n+1)+8(n+1)+10\right)\\&=\frac{n}{2}(2n^2+11n+19)\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{n(2n^2+11n+19)}{2}}$

問題 020（バリエーション No.1）

数列

$$6\cdot 1,\ 8\cdot 4,\ 10\cdot 7,\ 12\cdot 10,\ 14\cdot 13,\cdots$$

の第 n 項までの和は

$$n(\boxed{\text{ア}}\,n^2+\boxed{\text{イ}}\,n-\boxed{\text{ウ}})$$

である.

数列を $\{a_n\}$ とすると一般項は

$$a_n=(2n+4)(3n-2)=6n^2+8n-8$$

と書けるので, 第 n 項までの和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(6k^2+8k-8)&=n(n+1)(2n+1)+4n(n+1)-8n\\&=n\big((2n^2+3n+1)+4(n+1)-8\big)\\&=n(2n^2+7n-3)\end{aligned}$$

【答】 $\boldsymbol{n(2n^2+7n-3)}$