［コース ID：48］　基礎数学 BI

48.2　直線の方程式

48.2.1　直線の方程式

問題 001（バリエーション No.1）

点 $(9, -3)$ を通り, 傾きが -7 の直線の方程式を $y = ax + b$ の形で表すとき,
$a =$ $\boxed{\text{アイ}}$, $b =$ $\boxed{\text{ウエ}}$ である.

点 $(9, -3)$ を通り, 傾きが -7 である直線の方程式は

$$y - (-3) = -7(x - 9)$$

で与えられる. これを整理すると $y = -7x + 60$ となる.

(別解)
傾きが -7 であることから $a = -7$ である. 点 $(9, -3)$ を通るので $y = -7x + b$ に代入すると

$$-3 = -7 \times 9 + b$$

よって $b = 60$.

【答】　$\boldsymbol{a = -7,\ b = 60}$

問題 002（バリエーション No.1）

点 $(9, -3)$ を通り, x 軸の正方向とのなす角が 45° であるような直線の方程式を $y = ax + b$ の形で表すとき, $a =$ $\boxed{\text{ア}}$, $b =$ $\boxed{\text{イウエ}}$ となる.

x 軸となす角が 45° であるので傾きは 1 であることが分かる. 点 $(9, -3)$ を通り, 傾きが 1 である直線の方程式は

$$y - (-3) = x - 9$$

で与えられる. これを整理すると $y = x - 12$ となる.

(別解)
x 軸となす角が 45° であるので傾きは 1 であることが分かる. 点 $(9, -3)$ を通るので $y = x + b$ に代入すると

$$-3 = 9 + b$$

よって $b = -12$ となる.

【答】　$\boldsymbol{a = 1,\ b = -12}$

問題 003（バリエーション No.1）

2 点 $(3, -8)$, $(-3, 10)$ を通る直線の方程式を $y = ax + b$ の形で表すとき,
$a =$ $\boxed{\text{アイ}}$, $b =$ $\boxed{\text{ウ}}$ となる.

2 点 $(3,-8)$, $(-3,10)$ を通る直線の方程式は

$$y-(-8)=\frac{10-(-8)}{-3-3}(x-3)$$

で与えられる．これを整理すると $y=-3x+1$ を得る．

(別解)
2 点 (x_1,y_1), (x_2,y_2) を通る直線の傾きは

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

で与えられるので $a=\dfrac{10-(-8)}{-3-3}=-3$ である．$(3,-8)$ を通ることから $y=-3x+b$ に代入すると

$$-8=(-3)\times 3+b$$

よって $b=1$ である．

(別解 2)
2 点 $(3,-8)$, $(-3,10)$ を通るのでそれぞれ代入すると

$$\begin{cases}-8=3a+b\\ 10=-3a+b\end{cases}$$

この連立一次方程式を解けば $a=-3, b=1$ を得る．

【答】　$\boldsymbol{a=-3,\ b=1}$

問題 004（バリエーション No.1）

2 点 $(-7,3)$, $(-9,-5)$ を通る直線の方程式を $ax+by+c=0$ (但し, a,b,c は最も簡単な整数で, $a>0$ とする) の形で表すと $a=$ $\boxed{\text{ア}}$, $b=$ $\boxed{\text{イウ}}$, $c=$ $\boxed{\text{エオ}}$ となる．

2 点 $(-7,3)$, $(-9,-5)$ を通る直線の方程式は

$$y-3=\frac{-5-3}{-9-(-7)}(x-(-7))$$

で与えられる．これを整理すると $y=4x+31$, すなわち $4x-y+31=0$ を得る．

(別解)
一般に 2 点 (x_1,y_1), (x_2,y_2) を通る直線の方程式は

$$(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$$

で与えられる．$(-7,3)$, $(-9,-5)$ を通るので

$$\begin{gathered}(-9-(-7))(y-3)=(-5-3)(x-(-7))\\ -2(y-3)=-8(x+7)\end{gathered}$$

整理すると $8x-2y+62=0$ となる．両辺を 2 で割ると $4x-y+31=0$ である．

【答】　$\boldsymbol{a=4,\ b=-1,\ c=31}$

48.2.2　2 直線の関係

問題 001（バリエーション No.1）

点 $(2,4)$ を通り, 直線 $3x+4y-6=0$ に平行な直線を $ax+by+c=0$ とし, 垂直な直線を $dx+ey+f=0$ とするならば,
$a=$ ア , $b=$ イ , $c=$ ウエオ , $d=$ カ , $e=$ キク , $f=$ ケ となる.
なお回答は互いに素である整数 (a,b,c は互いに 1 以外では割り切れない数) とし, $a,d>0$ となるように回答せよ.

直線 $3x+4y-6=0$ は $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{2}$ であるのでその傾きは $-\dfrac{3}{4}$ である.
点 $(2,4)$ を通り, 傾きが $-\dfrac{3}{4}$ であるような直線の方程式は

$$y-4=-\frac{3}{4}(x-2)$$

で与えられるので整理すると, $3x+4y-22=0$ となる.
また, 傾きが $-\dfrac{3}{4}$ の直線と垂直になるような直線の傾きを m とすると

$$-\frac{3}{4}\times m=-1$$

が成り立つので $m=\dfrac{4}{3}$ である.
点 $(2,4)$ を通り, 傾きが $\dfrac{4}{3}$ であるような直線の方程式は

$$y-4=\frac{4}{3}(x-2)$$

で与えられるので整理すると, $4x-3y+4=0$ となる.

【答】　$\boldsymbol{a=3,\ b=4,\ c=-22,\ d=4,\ e=-3,\ f=4}$

問題 002（バリエーション No.1）

2 点 A$(4,10)$, B$(10,2)$ による線分 AB があるとき, この線分の垂直二等分線を $ax+by+c=0$ の形で表すと, $a=$ ア , $b=$ イウ , $c=$ エ となる. なお回答は互いに素である整数 (a,b,c は互いに 1 以外では割り切れない数) とし, $a>0$ となるように回答せよ.

線分 AB の傾きは

$$\frac{2-10}{10-4}=-\frac{4}{3}$$

であり, AB の中点は $\left(\dfrac{4+10}{2},\dfrac{10+2}{2}\right)=(7,6)$ である.
線分 AB の垂直二等分線とは AB の中点を通り, AB と垂直な直線であるので, すなわち点 $(7,6)$ を通り, 傾きが $\dfrac{3}{4}$ であるような直線である. そのような直線の方程式は

$$y-6=\frac{3}{4}(x-7)$$

で与えられるので整理すると, $3x-4y+3=0$ となる.

【答】　$\boldsymbol{a=3,\ b=-4,\ c=3}$

問題 003（バリエーション No.1）

直線 $3x-4y+3=0$ に対して点 A(4, 10) と対称な点 B があるとき，この点 B の座標は ($\boxed{\text{アイ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$) となる．

点 B は直線 $3x-4y+3=0$ に対して点 A と対称であるので，直線 $3x-4y+3=0$ は線分 AB の垂直二等分線になる．点 B の座標を (x,y) とすると，直線と垂直になることから

$$\frac{y-10}{x-4}=-\frac{4}{3}$$

が成り立つ．また AB の中点はこの直線上にあるので

$$3\left(\frac{x+4}{2}\right)-4\left(\frac{y+10}{2}\right)+3=0$$

が成り立つ．この 2 つの式を整理すると

$$\begin{cases}4x+3y=46\\3x-4y=22\end{cases}$$

となるので，この連立一次方程式を解くと $x=10,\ y=2$ を得る．

【答】　$\boldsymbol{(10,2)}$

問題 004（バリエーション No.1）

3 点 A(9, 1), B(−3, −4), C(−7, 3) によって出来る三角形 ABC の面積を求めたい．まず 2 点 AB 間の距離は $\boxed{\text{アイ}}$ である．次に直線 AB の方程式は $\boxed{\text{ウ}}\,x-\boxed{\text{エオ}}\,y-\boxed{\text{カキ}}=0$ であるので，この線分 AB と点 C の距離は $\boxed{\text{ク}}$ である．三角形の底辺 AB と点 C までの高さより，面積は $\boxed{\text{ケコ}}$ となる．

AB の間の距離は

$$\sqrt{(9-(-3))^2+(1-(-4))^2}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=\mathbf{13}$$

である．また 2 点 A,B を通る直線の方程式は

$$y-1=\frac{1-(-4)}{9-(-3)}(x-9)$$

で与えられるので整理すると $\boldsymbol{5x-12y-33=0}$ である．
一般に直線 $ax+by+c=0$ と点 (x_1,y_1) の距離は

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

で与えられる．よって直線 $5x-12y-33=0$ と点 $(-7,3)$ の距離は

$$\frac{|5\times(-7)+(-12)\times3-33|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{104}{13}=\mathbf{8}$$

となる．以上より三角形 ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\times13\times8=\mathbf{52}$ となる．