［コース ID：48］　基礎数学 BI

48.4　いろいろな 2 次曲線

48.4.1　いろいろな 2 次曲線

問題 001（バリエーション No.31）

焦点が $(0, 3)$, $(0, -3)$, 長軸の長さが 8 であるような楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{\boxed{\text{ア}}} + \frac{y^2}{\boxed{\text{イウ}}} = 1$$

である.

一般に楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

で与えられる．焦点が y 軸上にあることから $a < b$ であり, このとき長軸の長さは $2b$, 短軸の長さは $2a$ となるが, 長軸の長さが 8 であることから $b = 4$ である.
また, 焦点の座標 $(0, \pm c)$ は

$$c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

で与えられるので

$$3 = \sqrt{4^2 - a^2}$$

が成り立つ．両辺を 2 乗すると $a^2 = 16 - 9 = 7$ である.

【答】　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{7} + \dfrac{y^2}{16} = 1}$

問題 002（バリエーション No.32）

4 つの頂点が $(0, 25)$, $(0, -25)$, $(20, 0)$, $(-20, 0)$ であるような楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{\boxed{\text{アイウ}}} + \frac{y^2}{\boxed{\text{エオカ}}} = 1$$

である.
また, この楕円の焦点の座標は

$$(\boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{クケ}}),\ (\boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{サシス}})$$

である.

楕円の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

とおく．このとき, この楕円の 4 つの頂点は

$$(a, 0),\ (-a, 0),\ (0, b),\ (0, -b)$$

で与えられるので, $a = 20,\ b = 25$ である．また $a < b$ より楕円の焦点の座標は

$$c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

として $(0, \pm c)$ で与えられる．代入すると $c = 15$ となるので, 焦点の座標は

$$(0, 15),\ (0, -15)$$

である．

【答】　楕円の方程式は $\dfrac{x^2}{400} + \dfrac{y^2}{625} = 1$, 焦点の座標は $(0, 15),\ (0, -15)$

問題 003（バリエーション No.11）

楕円 $\dfrac{x^2}{225} + \dfrac{y^2}{144} = 1$ の長軸の長さは $\boxed{\text{アイ}}$, 短軸の長さは $\boxed{\text{ウエ}}$ である．
また, 焦点の座標は ($\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{カ}}$), ($\boxed{\text{キク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$) である．

$225 = 15^2,\ 144 = 12^2$ なので

$$\frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$$

である．楕円の方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

が $a > b$ であるとき, この楕円の長軸の長さは $2a$, 短軸の長さは $2b$ となる．よって, 長軸の長さは 30, 短軸の長さは 24 である．
また, $a > b$ より焦点の座標は

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

としたとき $(\pm c, 0)$ で与えられる．$\sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9$ より, 焦点の座標は

$$(9, 0),\ (-9, 0)$$

である．

【答】　長軸の長さは 30, 短軸の長さは 24, 焦点の座標は $(9, 0),\ (-9, 0)$

問題 004（バリエーション No.32）

焦点の座標が $(0, 20),\ (0, -20)$, 主軸の長さが 24 であるような双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{\boxed{\text{アイウ}}} - \frac{y^2}{\boxed{\text{エオカ}}} = \boxed{\text{キク}}$$

であり, この双曲線の漸近線の方程式は $y = \pm\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}x$ である．

焦点の座標が $(0, 20), (0, -20)$ であることから, 求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

とおける．このとき, 主軸の長さは $2b$ で与えられるので $b = 12$ である．またこのとき焦点の座標は

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

として $(0, c),\ (0, -c)$ となる．今, 焦点の座標は $(0, \pm 20)$ であるので

$$20 = \sqrt{a^2 + 12^2}$$

ここから $a = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16$ であることがわかる．以上から求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{256} - \frac{y^2}{144} = -1$$

となる．また, 双曲線の漸近線の方程式は

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

で与えられるので, この双曲線の漸近線の方程式は $y = \pm\frac{12}{16}x = \pm\frac{3}{4}x$ である．

【答】　双曲線の方程式は $\boldsymbol{\frac{x^2}{256} - \frac{y^2}{144} = -1}$, 漸近線の方程式は $\boldsymbol{y = \pm\frac{3}{4}x}$

問題 005（バリエーション No.22）

双曲線 $64x^2 - 36y^2 = 2304$ の焦点の座標は $(\pm$ $\boxed{\text{アイ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ $)$, 頂点の座標は $(\pm$ $\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ $)$ である．

また, この双曲線の漸近線の方程式は $y = \pm\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}x$ である．

$64 = 8^2,\ 36 = 6^2,\ 2304 = 48^2$ であるので, 双曲線の方程式の両辺を 2304 で割ると

$$\left(\frac{8}{48}\right)^2 x^2 - \left(\frac{6}{48}\right)^2 y^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{8^2} = 1$$

となる．双曲線が方程式

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

で表されるとき, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ として焦点の座標は

$$(c, 0),\ (-c, 0)$$

また, 頂点の座標は

$$(a, 0),\ (-a, 0)$$

で与えられる．$\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ であるので, 焦点の座標は $(\pm 10, 0)$, 頂点の座標は $(\pm 6, 0)$ である．
双曲線の漸近線の方程式は

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

で与えられるから, この双曲線の漸近線の方程式は $y = \pm\frac{8}{6}x = \pm\frac{4}{3}x$ である．

【答】　焦点の座標は $\boldsymbol{(\pm 10, 0)}$, 頂点の座標は $\boldsymbol{(\pm 6, 0)}$, 漸近線の方程式は $\boldsymbol{y = \pm\frac{4}{3}x}$

問題 006（バリエーション No.17）

双曲線 $16x^2 - 9y^2 = -144$ の焦点の座標は ($\boxed{\text{ア}}$,± $\boxed{\text{イ}}$), 頂点の座標は ($\boxed{\text{ウ}}$,± $\boxed{\text{エ}}$) である.

また, この双曲線の漸近線の方程式は $y = \pm\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x$ である.

$16 = 4^2,\ 9 = 3^2,\ 144 = 12^2$ であるから, 双曲線の方程式の両辺を 144 で割ると

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = -1$$

となる. 双曲線が方程式

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

で表されるとき, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ として焦点の座標は

$$(0, c),\ (0, -c)$$

また, 頂点の座標は

$$(0, b),\ (0, -b)$$

で与えられる. $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ であるので, 焦点の座標は $(0, \pm 5)$, 頂点の座標は $(0, \pm 4)$ である.
双曲線の漸近線の方程式は

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

で与えられるから, この双曲線の漸近線の方程式は $y = \pm\dfrac{4}{3}x$ である.

【答】　焦点の座標は $(0, \pm 5)$, 頂点の座標は $(0, \pm 4)$, 漸近線の方程式は $y = \pm\dfrac{4}{3}x$

問題 007（バリエーション No.40）

焦点が $(0, 20)$, 準線の方程式が $y = -20$ であるような放物線の方程式は

$$x^2 = \boxed{\text{アイ}}\,y$$

である.

焦点が $(0, p)$, 準線が $y = -p$ であるような放物線の方程式は

$$x^2 = 4py$$

で与えられる. $p = 20$ とすれば求める放物線の方程式は

$$x^2 = 80y$$

である.

【答】　$x^2 = 80y$

問題 008（バリエーション No.17）

放物線 $y^2 = 28x$ の焦点の座標は ($\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$) であり, 準線の方程式は $x = \boxed{\text{ウエ}}$ である.

放物線が

$$y^2 = 4px$$

で表されているとき, 焦点の座標は $(p, 0)$, 準線の方程式は $x = -p$ で与えられる.
よって求める放物線の焦点の座標は $(7, 0)$, 準線の方程式は $x = -7$ である.

【答】　焦点の座標は $(7, 0)$, 準線の方程式は $x = -7$

問題 008（バリエーション No.22）

放物線 $x^2 = -36y$ の焦点の座標は ($\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$) であり, 準線の方程式は $y = \boxed{\text{ウエ}}$ である.

放物線が

$$x^2 = 4py$$

で表されているとき, 焦点の座標は $(0, p)$, 準線の方程式は $y = -p$ で与えられる.
よって求める放物線の焦点の座標は $(0, -9)$, 準線の方程式は $y = 9$ である.

【答】　焦点の座標は $(0, -9)$, 準線の方程式は $y = 9$

問題 009（バリエーション No.80）

方程式 $y = 3x^2 + 18x + 33$ で表される放物線の焦点の座標は ($\boxed{\text{アイ}}$, $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$), 準線は $y = \dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である

方程式 $y = 3x^2 + 18x + 33$ を平方完成すると

$$y = 3(x + 3)^2 + 6$$

よってこの方程式で表される放物線は,

$$y = 3x^2$$

で表される放物線を x 軸方向に -3, y 軸方向に 6 だけ平行移動したものである.
放物線 $y = 3x^2$ は $x^2 = \dfrac{1}{3}y$ であるので, この放物線の焦点の座標は $\left(0\,,\,\dfrac{1}{12}\right)$, 準線の方程式は $y = -\dfrac{1}{12}$ である.
求める放物線の焦点と準線は, 放物線 $y = 3x^2$ の焦点と準線を同様に x 軸方向に -3, y 軸方向に 6 だけ平行移動したものになるので, その焦点の座標は

$$\left(-3\,,\,\frac{1}{12} + 6\right)$$

より $\left(-3\,,\,\dfrac{73}{12}\right)$, 準線の方程式は

$$y = -\frac{1}{12} + 6$$

より $y = \dfrac{71}{12}$ となる.

【答】　焦点の座標は $\boldsymbol{\left(-3, \dfrac{71}{12}\right)}$, **準線の方程式は** $\boldsymbol{y = \dfrac{71}{12}}$