［コース ID：48］　基礎数学 BI

48.7　線形計画法

48.7.1　線形計画法

問題 001（バリエーション No.1）

あるラーメン店ではスープによって, ラーメンの値段が違っている. スープを作る一つの鍋ごとにラーメン A は鶏ガラ 2kg, 豚骨 1kg, ラーメン B は鶏ガラ 1kg, 豚骨 2kg, それぞれ, 必要である. このとき, 鶏ガラ 15kg 以内, 豚骨 9kg 以内としたい. また, 一つの鍋ごとにラーメン A の売上は 5 万円, ラーメン B の売上は 8 万円であるとき, 決められた材料内で売り上げをできるだけ多くするならば, ラーメン A のスープは鍋 $\boxed{\text{ア}}$ つ, ラーメン B のスープは鍋 $\boxed{\text{イ}}$ つ作れば売り上げが最大の $\boxed{\text{ウエ}}$ 万円となる.

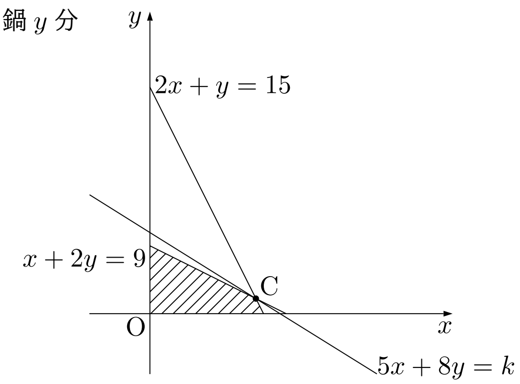
ラーメン A のスープを鍋 x, ラーメン B のスープを鍋 y 分だけ作ったとすると使用する鶏ガラの量は

$$2x + y$$

使用する豚骨の量は

$$x + 2y$$

である.



鶏ガラ 15kg, 豚骨 9kg 以内とするとき, x, y は

$$2x + y \leqq 15, \quad x + 2y \leqq 9, \quad 0 \leqq x, \quad 0 \leqq y$$

で定義される領域内の値をとりうる.
ラーメン A の売上が 5 万円, ラーメン B の売上が 8 万円なので, 全体の売り上げを k とすると

$$k = 5x + 8y$$

と書ける. k の値が最大となるのは, 上の図から $5x + 8y = k$ が直線 $2x + y = 15$ と $x + 2y = 9$ の交点 C を通るときである. 連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x + y = 15 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$$

を解くと $x = 7, y = 1$ であり, 直線 $5x + 8y = k$ が点 $(7, 1)$ を通るとき,

$$k = 5 \times 7 + 8 \times 1 = 43$$

である. よってラーメン A のスープの鍋を 7 つ, ラーメン B のスープの鍋を 1 つ作れば売上が最大の 43 万円となる.

(別解)
線形計画法は上で解いたようにいくつかの直線で定義される領域内で, ある条件を満たすような値を定める手法である. 上の問題では図を用いることで視覚的に”点 C を通るときに k は 最大となる”ことが分かるが, ”本当にこの図を信じていいのか?” と疑問に思う人もいるかもしれない. 以下ではそん

な人のために図を用いない解法を述べる．
まず問題を整理すると，(x, y) が

$$2x+y \leqq 15, \quad x+2y \leqq 9, \quad 0 \leqq x, \quad 0 \leqq y$$

で定義される領域内の値をとるとき

$$5x+8y$$

が最大となるような (x, y) を求めたい．不等式を y について整理すると

$$\begin{aligned} y &\leqq -2x+15 \\ y &\leqq -\frac{1}{2}x+\frac{9}{2} \end{aligned}$$

となるが $0 \leqq y$ より

$$0 \leqq -2x+15 \quad \text{かつ} \quad 0 \leqq -\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$$

$0 \leqq x$ であるから，まとめると $0 \leqq x \leqq \dfrac{15}{2}$ である．また

$$-2x+15 \leqq -\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$$

を解くと $7 \leqq x$ となるので (x, y) のとりうる値の範囲は

$$\begin{cases} 0 \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{2} & (0 \leqq x \leqq 7) \\ 0 \leqq y \leqq -2x+15 & (7 \leqq x \leqq \dfrac{15}{2}) \end{cases}$$

と表せる．よって，$0 \leqq x \leqq 7$ のとき

$$\begin{aligned} 5x+8y &\leqq 5x+8\left(-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}\right) \\ &= 5x-4x+36 = x+36 \end{aligned}$$

また $7 \leqq x \leqq \dfrac{15}{2}$ のとき

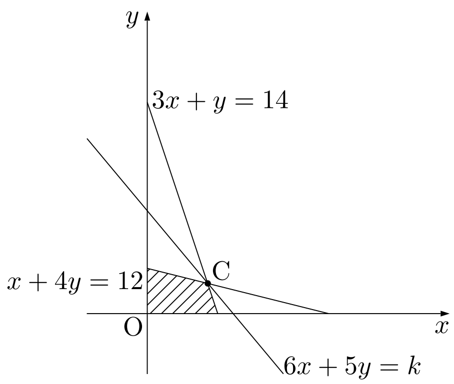
$$\begin{aligned} 5x+8y &\leqq 5x+8(-2x+15) \\ &= 5x-16x+120 = -11x+120 \end{aligned}$$

いずれにしても $x=7$ のとき，$5x+8y$ は最大値 43 をとる．またこのとき $y=1$ である．

【答】　ラーメン A の鍋を 7 つ，ラーメン B の鍋を 1 つ作れば売上が最大の 43 万円となる．

問題 001（バリエーション No.16）

製薬工場で成分の異なる薬を使い製薬した．この製薬工程では，薬の工程ごとに頭痛薬は薬品 A を 3kg，薬品 B を 1kg，風邪薬は薬品 A を 1kg，薬品 B を 4kg，それぞれ，必要である．このとき，1 日の薬品の納入量の上限から，薬品 A を 14kg 以内，薬品 B を 12kg 以内としたい．また，一つの工程ごとに頭痛薬の売上は 6 万円，風邪薬の売上は 5 万円であるとき，決められた材料内で売り上げをできるだけ多くするならば，頭痛薬を $\boxed{\text{ア}}$ 工程，風邪薬を $\boxed{\text{イ}}$ 工程行えば，売上が最大の $\boxed{\text{ウエ}}$ 万円となる．



頭痛薬の工程数を x, 風邪薬の工程数を y とすると,
必要となる薬品 A の量は

$$3x+y$$

また必要となる薬品 B の量は

$$x+4y$$

である.
薬品 A を 14kg 以内, 薬品 B を 12kg 以内とするとき
(x,y) のとりうる値の範囲は

$$3x+y \leqq 14,\quad x+4y \leqq 12,\quad 0 \leqq x,\quad 0 \leqq y$$

となる.
全体の売り上げを k とおくと

$$k=6x+5y$$

であり, k の値は直線 $6x+5y=k$ が直線 $3x+y=14$ と $x+4y=12$ の交点 C を通るとき最大となる.

$$\begin{cases} 3x+y=14 \\ x+4y=12 \end{cases}$$

を解くと $x=4,\ y=2$ となるので点 C の座標は $(4,2)$ である．よって

$$k=6\times4+5\times2=34$$

【答】　頭痛薬を 4 工程, 風邪薬を 2 工程行えば, 売上が最大の 34 万円となる.