# ［コース ID：48］　基礎数学 BI

## 48.3　円の方程式

### 48.3.1　円の方程式

**問題 001（バリエーション No.7）**

2 点 $(-9,-8)$, $(-1,-2)$ を直径の両端とするような円の方程式は

$$(x+\boxed{\text{ア}})^2+(y+\boxed{\text{イ}})^2=\boxed{\text{ウ}}^2$$

である．

2 点 $(-9,-8)$, $(-1,-2)$ が円の直径の両端となっているとき，その 2 点の中点が円の中心となり，2 点間の距離が円の直径になる．中点は

$$\left(\frac{-9-1}{2},\frac{-8-2}{2}\right)=(-5,-5)$$

また，2 点間の距離は

$$\sqrt{(-9+1)^2+(-8+2)^2}=\sqrt{100}=10$$

なので，中心が $(-5,-5)$，半径が 5 の円の方程式は

$$(x+5)^2+(y+5)^2=5^2$$

**【答】**　$\boldsymbol{(x+5)^2+(y+5)^2=5^2}$

**問題 002（バリエーション No.1）**

2 点 $(1,5)$, $(-7,-1)$ を直径の両端とするような円の方程式は

$$x^2+y^2+\boxed{\text{ア}}\,x-\boxed{\text{イ}}\,y-\boxed{\text{ウエ}}=0$$

である．

2 点 $(1,5)$, $(-7,-1)$ が円の直径の両端となっているとき，中点が円の中心であり，2 点間の距離が円の直径になる．中点は

$$\left(\frac{1-7}{2},\frac{5-1}{2}\right)=(-3,2)$$

また，2 点間の距離は

$$\sqrt{(1+7)^2+(5+1)^2}=\sqrt{100}=10$$

中心が $(-3,2)$，半径が 5 の円の方程式は $(x+3)^2+(y-2)^2=5^2$ なので，展開して一般形に直すと

$$(x^2+6x+9)+(y^2-4y+4)=25$$

整理すると

$$x^2+y^2+6x-4y-12=0$$

**【答】**　$\boldsymbol{x^2+y^2+6x-4y-12=0}$

**問題 003（バリエーション No.7）**

2 点 $(3, 1)$, $(8, 2)$ を通り, 中心が $y$ 軸上にあるような円の方程式は

$$x^2 + (y - \boxed{\text{アイ}})^2 = \boxed{\text{ウエオ}}$$

である.

中心が $y$ 軸上にあるので, 中心の $x$ 座標を 0 である．よって求める円の方程式は

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2$$

とおける．2 点 $(3, 1)$, $(8, 2)$ を通ることから, それぞれ代入すると

$$3^2 + (1 - b)^2 = r^2$$
$$8^2 + (2 - b)^2 = r^2$$

が成り立つ．2 式の差をとることで

$$9 - 64 + (1 - b)^2 - (2 - b)^2 = 0$$

この式を整理すると $2b = 58$ となるので $b = 29$ を得る．ここから

$$r^2 = 3^2 + (1 - 29)^2 = 9 + 784 = 793$$

を得る.

**【答】** $\boldsymbol{x^2 + (y - 29)^2 = 793}$

**問題 004（バリエーション No.1）**

2 点 $(8, 2)$, $(10, 6)$ を通り, 中心が $x$ 軸上にあるような円の方程式は

$$(x - \boxed{\text{アイ}})^2 + y^2 = \boxed{\text{ウエ}}$$

である.

中心が $x$ 軸上にあるので, 中心の $y$ 座標は 0 である．よって求める円の方程式は

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2$$

とおける．2 点 $(8, 2)$, $(10, 6)$ を通ることから, それぞれ代入すると

$$(8 - a)^2 + 2^2 = r^2$$
$$(10 - a)^2 + 6^2 = r^2$$

2 式の差をとれば

$$(8 - a)^2 - (10 - a)^2 + 4 - 36 = 0$$

この式を整理すると, $4a = 68$ となるので $a = 17$ である．また

$$r^2 = (8 - 17)^2 + 4 = 85$$

を得る.

**【答】** $\boldsymbol{(x - 17)^2 + y^2 = 85}$

**問題 005（バリエーション No.1）**

2 点 A$(3,5)$, B$(6,5)$ からの距離の比が AP:BP$=1:2$ であるような点 P が描く軌跡の方程式は

$$(x-\boxed{\text{ア}})^2+(y-\boxed{\text{イ}})^2=\boxed{\text{ウ}}$$

である.

点 P の座標を $(x,y)$ とすると,

$$\mathrm{AP}=\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}$$

$$\mathrm{BP}=\sqrt{(x-6)^2+(y-5)^2}$$

であるから, 点 P が満たすべき条件は

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}:\sqrt{(x-6)^2+(y-5)^2}=1:2$$

と書ける. すなわち

$$\sqrt{(x-6)^2+(y-5)^2}=2\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}$$

であるから両辺を 2 乗して整理すると

$$\bigl(4(x-3)^2-(x-6)^2\bigr)+\bigl(4(y-5)^2-(y-5)^2\bigr)=0$$

ここで

$$\begin{aligned}4(x-3)^2-(x-6)^2&=4(x^2-6x+9)-(x^2-12x+36)\\&=3x^2-12x\\&=3(x-2)^2-12\end{aligned}$$

であるから結局 P の満たすべき条件は

$$3(x-2)^2+3(y-5)^2=12$$

とかける. 両辺を 3 で割れば

$$(x-2)^2+(y-5)^2=4$$

を得る.
また, この計算を逆に辿ることで, $(x-2)^2+(y-5)^2=4$ 上の点 P は AP:BP$=1:2$ を満たすこともわかる.

**【答】　$(x-2)^2+(y-5)^2=4$**

**問題 005（バリエーション No.100）**

2 点 A$(7,4)$, B$(2,-6)$ からの距離の比が AP:BP$=3:2$ であるような点 P が描く軌跡の方程式は

$$(x+\boxed{\text{ア}})^2+(y+\boxed{\text{イウ}})^2=\boxed{\text{エオカ}}$$

である.

点 P の座標を $(x,y)$ とすると,

$$\mathrm{AP}=\sqrt{(x-7)^2+(y-4)^2}$$

$$\mathrm{BP}=\sqrt{(x-2)^2+(y+6)^2}$$

であるから, 点 P が満たすべき条件は

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=\sqrt{(x-7)^2+(y-4)^2}:\sqrt{(x-2)^2+(y+6)^2}=3:2$$

とである．すなわち

$$3\sqrt{(x-2)^2+(y+6)^2}=2\sqrt{(x-7)^2+(y-4)^2}$$

であるから両辺を 2 乗して整理すると

$$\bigl(9(x-2)^2-4(x-7)^2\bigr)+\bigl(9(y+6)^2-4(y-4)^2\bigr)=0$$

ここで

$$\begin{aligned}9(x-2)^2-4(x-7)^2&=(9x^2-36x+36)-(4x^2-56x+196)\\&=5x^2+20x-160\\&=5(x+2)^2-180\end{aligned}$$

であり, また

$$\begin{aligned}9(y+6)^2-4(y-4)^2&=(9y^2+108y+324)-(4y^2-32y+64)\\&=5y^2+140y+260\\&=5(y+14)^2-720\end{aligned}$$

であるから P の満たすべき条件は

$$5(x+2)^2+5(y+14)^2=180+720=900$$

と表せる．両辺を 5 で割ると

$$(x+2)^2+(y+14)^2=180$$

また, この計算を逆に辿ることで, $(x+2)^2+(y+14)^2=180$ 上の点 P は AP:BP$=3:2$ を満たすこともわかる．

**【答】**　$\boldsymbol{(x+2)^2+(y+14)^2=180}$