

【コース ID : 50】 基礎数学 AI

50.7 2 次方程式

50.7.1 2 次方程式

問題 001 (バリエーション No.1)

2 次方程式 $x^2 - 19x + 90 = 0$ の解は $x =$, である.

$x^2 - 19x + 90 = (x - 10)(x - 9) = 0$ より $x = 10$ または $x = 9$ である.

【答】 $x = 10, 9$

問題 002 (バリエーション No.1)

2 次方程式 $x^2 - 9x - 10 = 0$ の解は $x =$, である. ただし, と の解答の順序は問わない.

$x^2 - 9x - 10 = (x - 10)(x + 1) = 0$ より $x = 10$ または $x = -1$ である.

【答】 $x = 10, -1$

問題 003 (バリエーション No.1)

2 次方程式 $25x^2 - 15x - 4 = 0$ の解は $x = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$, $\frac{\text{ウエ}}{\text{オ}}$ である.

$25x^2 - 15x - 4 = (5x - 4)(5x + 1) = 0$ より $x = \frac{4}{5}, \frac{-1}{5}$ である.

【答】 $x = \frac{4}{5}, \frac{-1}{5}$

問題 004 (バリエーション No.1)

2 次方程式 $25x^2 - 35x + 12 = 0$ の解は $x = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$, $\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ である. ただし, と の解答の順序は問わない.

$25x^2 - 35x + 12 = (5x - 3)(5x - 4) = 0$ より $x = \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ である.

【答】 $x = \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$

問題 005 (バリエーション No.1)

2次方程式 $2x^2 - 9x - 10 = 0$ の解は $x = \frac{\boxed{\text{ア}} \pm \sqrt{\boxed{\text{イウエ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。ただし、 i は虚数単位とする。

2次方程式の解の公式を用いて

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 2 \times (-10)}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{161}}{4}$$

【答】 $\frac{9 \pm \sqrt{161}}{4}$

問題 006 (バリエーション No.1)

2次方程式 $2x^2 - 7x + 7 = 0$ の解は $x = \frac{\boxed{\text{ア}} \pm \sqrt{\boxed{\text{イ}}}i}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。ただし、 i は虚数単位とする。

2次方程式の解の公式を用いて

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 2 \times 7}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{-7}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{7}i}{4}$$

【答】 $x = \frac{7 \pm \sqrt{7}i}{4}$

問題 007 (バリエーション No.1)

次の設問を埋めよ。 $\boxed{\text{イ}}$ については下の ① ~ ② から当てはまるものを選べ。

2次方程式 $x^2 - 20x + 100 = 0$ の判別式の値は $D = \boxed{\text{ア}}$ であるから、この方程式は $\boxed{\text{イ}}$ 。

- ① 異なる2つの実数解をもつ
- ② 重解を持つ
- ③ 異なる2つの虚数解をもつ

判別式の値は $D = 20^2 - 4 \times 100 = 400 - 400 = 0$ 。よってこの方程式は重解を持つ。

【答】 $D = 0$ 、この方程式は重解を持つ。

問題 008 (バリエーション No.1)

k を実数の定数とする。 x についての2次方程式 $3x^2 + 10x + k = 0$ が重解を持つとき、

$k = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

判別式 D の値が 0 になるように k の値を定めればよい.

$$D = 10^2 - 4 \times 3 \times k = 100 - 12k$$

より $D = 0$ のとき, $k = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$ である.

【答】 $k = \frac{25}{3}$

問題 009 (バリエーション No.1)

次の設問を埋めよ. については下の ① ~ ④ から当てはまるものを選べ.

x についての 2 次方程式 $2x^2 - 10x + k = 0$ が異なる 2 つの実数解を持つとき,

k となる.

① $>$

② \geq

③ $=$

④ \leq

⑤ $<$

判別式 D が $D > 0$ を満たすように k の値を定めればよい. $D = 100 - 8k$ であるから $D > 0$ のとき,
 $k < \frac{100}{8} = \frac{25}{2}$.

【答】 $k < \frac{25}{2}$

問題 010 (バリエーション No.1)

x についての 2 次方程式 $x^2 + kx + 1 = 0$ が重解を持つとき, 定数 k の値は または である.

判別式 D が $D = 0$ を満たすように k の値を定めればよい. $D = k^2 - 4$ であるから $k^2 - 4 = 0$ を解くと $k = 2$ または $k = -2$ である.

【答】 $k = -2$ または $k = 2$

50.7.2 解と係数の関係

問題 001 (バリエーション No.1)

2 次方程式 $3x^2 + 5x - 7 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき

$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\text{アイ}}{\text{ウ}}, \alpha^3 + \beta^3 = \frac{\text{エオカキ}}{\text{クケ}}$ である.

解と係数の関係より, $\alpha + \beta = -\frac{5}{3}$, $\alpha\beta = -\frac{7}{3}$ である. よって

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{25}{9} + \frac{14}{3} = \frac{67}{9}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = -\frac{125}{27} - \frac{105}{9} = -\frac{440}{27}$$

【答】 $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{67}{9}$, $\alpha^3 + \beta^3 = \frac{-440}{27}$

問題 002 (バリエーション No.1)

2 次方程式 $2x^2 + 2x - 3 = 0$ の 2 つの解を α , β とするとき

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \text{ である.}$$

解と係数の関係より $\alpha + \beta = -1$, $\alpha\beta = -\frac{3}{2}$ である. よって

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 = -1 - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

【答】 $(\alpha + 1)(\beta + 1) = \frac{-3}{2}$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{3}$

問題 003 (バリエーション No.1)

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2} \text{ を解とする 2 次方程式は } x^2 - \boxed{\text{ア}}x + \boxed{\text{イ}} = 0 \text{ である.}$$

2 つの解を α , β とすると, $\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = \frac{3^2 + \sqrt{3}^2}{4} = 3$ である. よって解と係数の関係より α, β を解に持つ 2 次方程式は $x^2 - 3x + 3 = 0$ となる.

【答】 $x^2 - 3x + 3 = 0$

問題 004 (バリエーション No.1)

p を正の数とする. 2 次方程式

$$x^2 + px - 1 = 0$$

の 2 解 α , β が

$$2\alpha^2 + 2\beta^2 + \alpha + \beta = 19 \quad \alpha < \beta$$

を満たすとき

$$p = \boxed{\text{ア}}, \quad \alpha = \frac{\boxed{\text{イウ}} - \sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である.

解と係数の関係から $\alpha + \beta = -p$, $\alpha\beta = -1$ が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} 2\alpha^2 + 2\beta + \alpha + \beta &= 2(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta + (\alpha + \beta) \\ &= 2p^2 - p + 4 = 19 \end{aligned}$$

$2p^2 - p - 15 = 0$ を解くと $p = 3$ または $p = -\frac{5}{2}$ となるが, p は正の数なので $p = 3$ である.

2 次方程式に $p = 3$ を代入し, $x^2 + 3x - 1 = 0$ を解くと $x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$ を得るが, 2 解 α, β は $\alpha < \beta$ を満たすので $\alpha = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$ である.

【答】 $p = 3, \alpha = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$